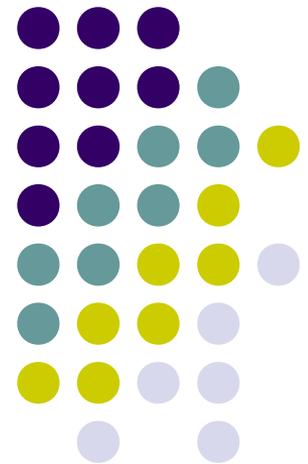


Методы комбинаторно-топологических построений и супервычисления.

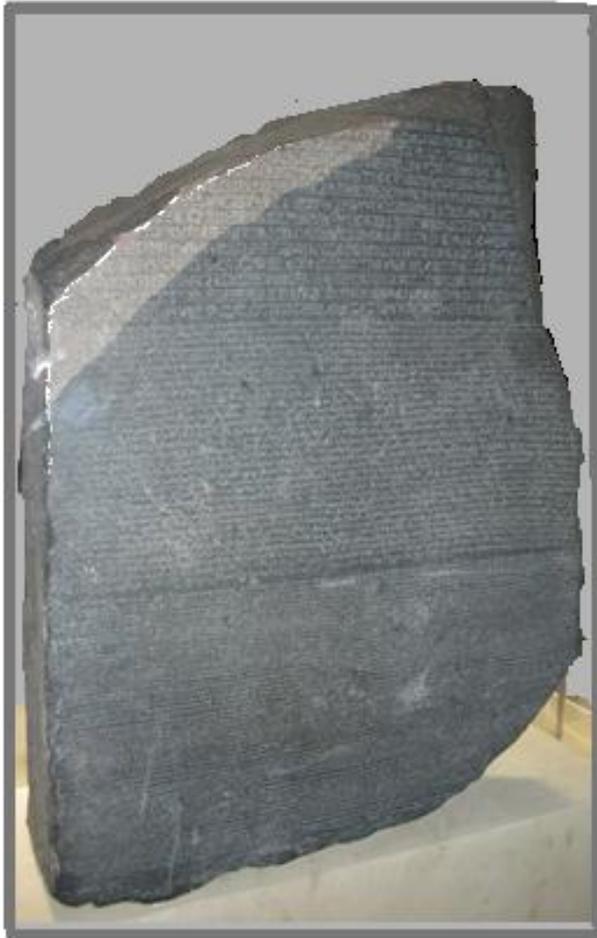
Алгебраическое представление кубических структур.

Г.Г.Рябов (НИВЦ МГУ)



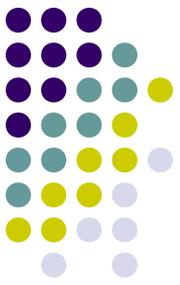
О розетском камне

через 180 лет.



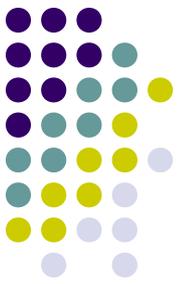
- 1829 – расшифровка Ж.Ф.Шампольоном надписей на Розетском камне.
- 2009 – «Физика-топология-логика-компьютерные вычисления: Розетский камень.»(J.Baez, M.Stay)
- Физика → система-процесс
- Топология → многообразие-кобордизм
- Логика → суждение-доказательство
- Вычисления → тип данных-программа
- Ю.И.Манин. Компьютерные вычисления-категорный подход (труды 1999-2009 годов).

Конструктивный мир кубических структур.



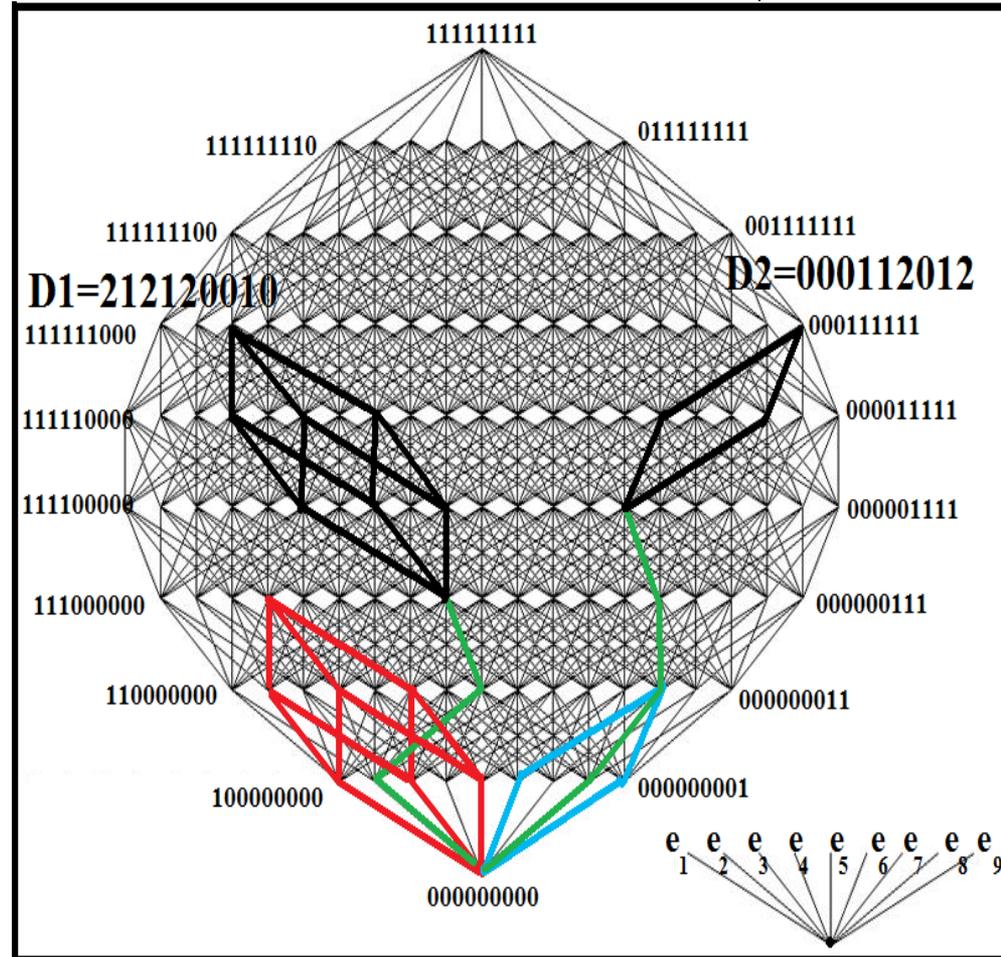
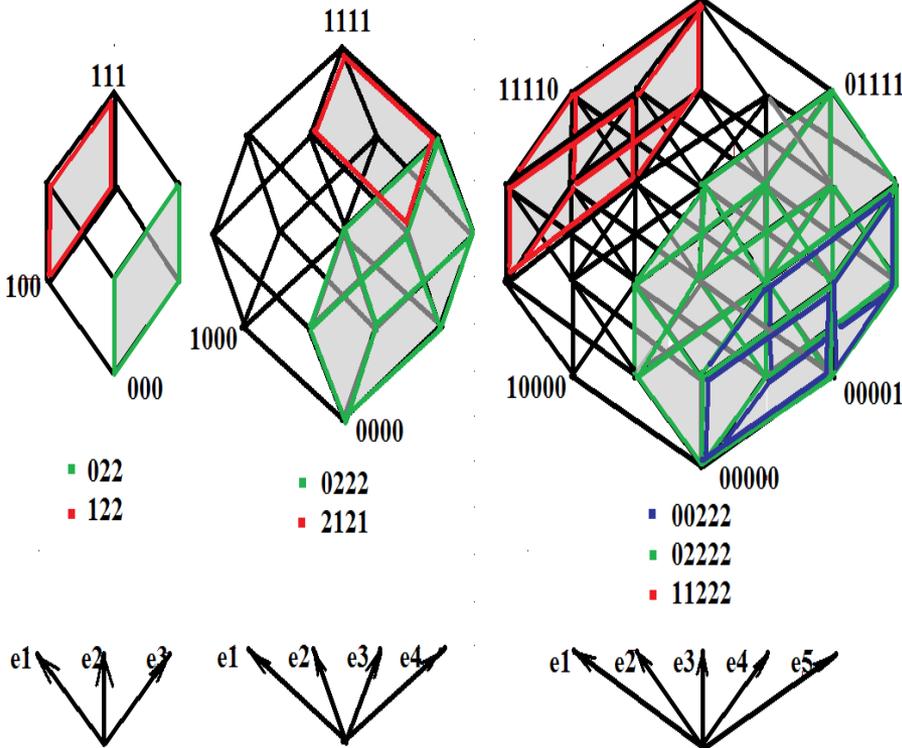
- Определение элемента множества над конечным алфавитом → введение операции, расширение алфавита → алгебраическая структура → подмножества элементов → другие операции → метрическое пространство → пример построения метрико-топологической структуры алгебраическими методами → особенности организации вычислительного процесса → черты будущей архитектуры для супервычислений.

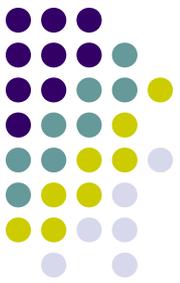
Биекция: мн-во всех n -разрядных троичных кодов $\leftarrow \rightarrow$ мн-во всех граней n -куба.



- $E = e_1, e_2, \dots, e_n; \rightarrow \mathbb{R}^n;$
- $D = d_1, d_2, \dots, d_n; d_i \in \{0, 1, 2\};$
- $F(k, p) = \prod_{i: d_i=2; (k)} e_i + \prod_{j: d_j=0, 1; (n-k)} e_j;$
- Так $021221 - e_2 \times e_4 \times e_5$ (трехмерная грань), транслированная в вершину 001001 в шестимерном кубе I^6 .
- **Кубант (кубический квант)** – n -разрядный троичный код, однозначно определяющий размерность и положение грани в n -мерном единичном кубе I^n .

Графические интерпретации для малых размерностей.





Умножение кубантов.

- Операция умножения-коммутативна, ассоциативна, дистрибутивна.
- Доопределение умножения на расширенном алфавите.
- Машинная реализация четверичного алфавита.

| Π | d_{1i} | 0 | 1 | 2 |
|----------|----------|-------------|-------------|---|
| d_{2i} | | | | |
| 0 | | 0 | \emptyset | 0 |
| 1 | | \emptyset | 1 | 1 |
| 2 | | 0 | 1 | 2 |

 \longrightarrow

| Π | d_{1i} | \emptyset | 0 | 1 | 2 |
|-------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| d_{2i} | | | | | |
| \emptyset | | \emptyset | \emptyset | \emptyset | \emptyset |
| 0 | | \emptyset | 0 | \emptyset | 0 |
| 1 | | \emptyset | \emptyset | 1 | 1 |
| 2 | | \emptyset | 0 | 1 | 2 |

$$\{0,1,2\} \longrightarrow \{\emptyset,0,1,2\}$$

$$\{\emptyset,0,1,2\} \xrightarrow{M} \{0,1,2,3\}$$

Графическая интерпретация.



1. Табличное представление операции умножения.

| П | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | ∅ | 0 |
| 1 | ∅ | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 2 |

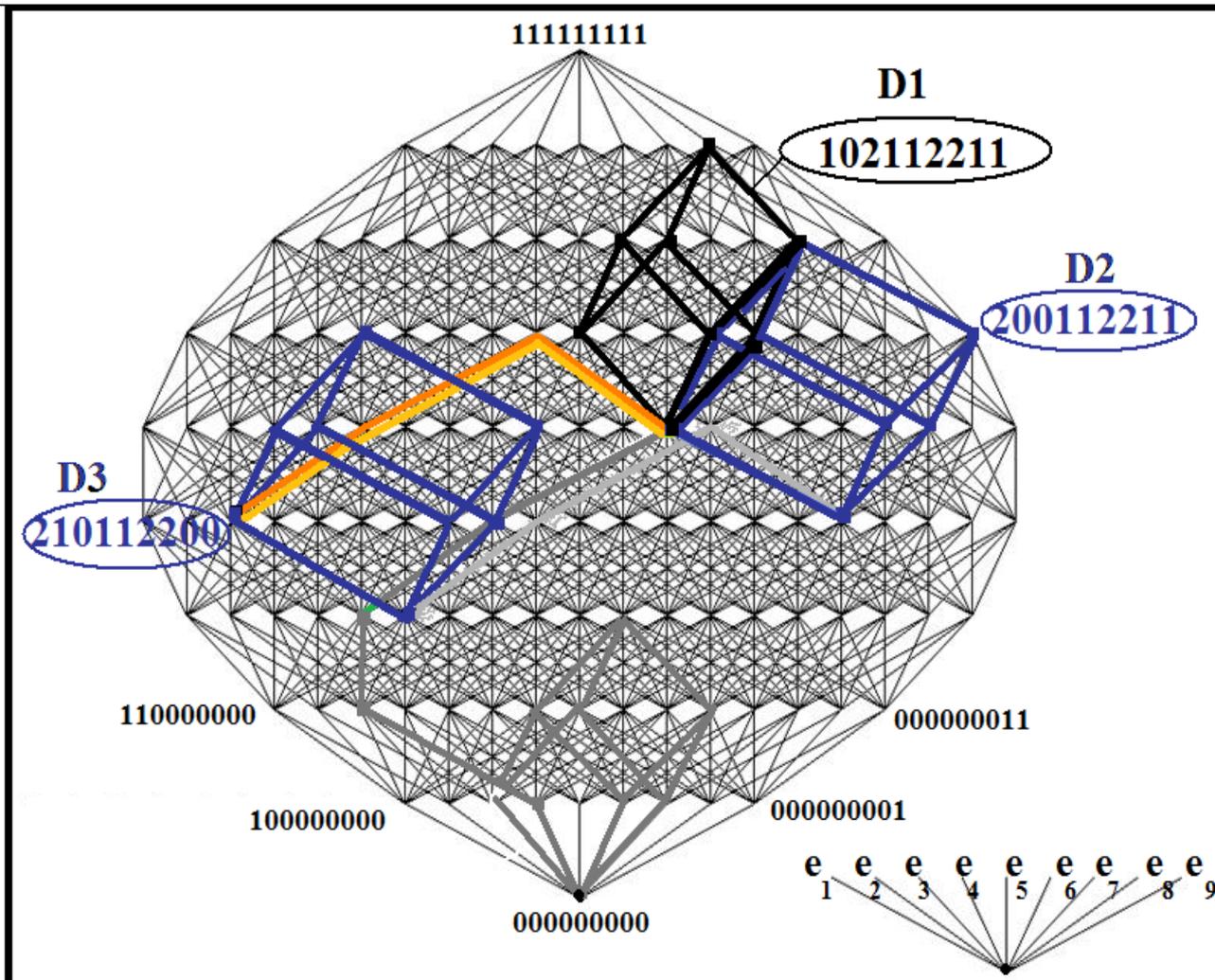
D1=102112211;

D2=200112211; D3=210112200;

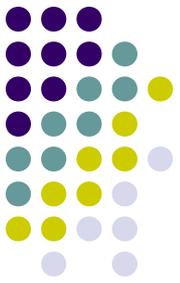
2. $\Pi(102112211, 200112211) = 100112211$ (общая грань)

3. $\Pi(102112211, 210112200) = 1\emptyset 11122\emptyset\emptyset$ (длина кратчайшего пути равна 3)

4. Расширенный алфавит четверичный $\{\emptyset, 0, 1, 2\}$;

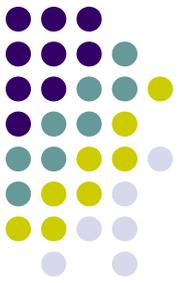


Алгебраическая структура – МОНОИД.

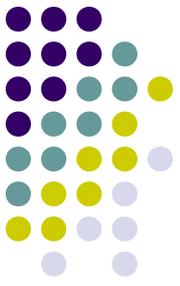


- Произведение двух кубантов- кубант или псевдокубант (слово с \emptyset).
- Произведение, где один из сомножителей псевдокубант- всегда псевдокубант.
- Кубанты и псевдокубанты (все четверичные n -разрядные слова) образуют полугруппу с единицей (кубант $2^2 \dots 2$)-моноид с общим числом элементов 4^n (из них кубантов 3^n).

Свойство произведения.



- Произведение кубантов :
- Или максимальный общий кубант.
- Или путь минимальной длины между кубантами.
- Структура подмножества кубантов полностью определяется матрицей парных произведений (аналог матрицы смежностей для графов).
- Множество всех подмножеств кубантов – 2^A элементов, где $A=3^n$;



Подмножество кубантов → матрица парных произведений (смежностей)

- $D_1, D_2, \dots, D_s \rightarrow M_{pp}; m_{ij} = \Pi(D_i, D_j); i, j = 1, 2, \dots, n;$

- $D_1=112202; D_2=121122; D_3=122211; D_4=120122; D_5=002212;$

-

- $M_{pp} = \begin{array}{ccccc} 112202 & 111102 & 1112\emptyset 1 & 110102 & \emptyset\emptyset 22\emptyset 2 \\ & 121122 & 121111 & 12\emptyset 122 & \emptyset 01112 \\ & & 122211 & 120111 & \emptyset 02211 \\ & & & 120122 & \emptyset 00112 \\ & & & & 002212 \end{array}$
- симметрия

- D_1, D_2, D_3, D_4 -образуют цикл (общие ребра); D_5 отстоит на $L_{min}=1$ от D_2, D_3, D_4 и на $L_{min}=3$ от D_1 ;

- M_{pp} -обобщение матрицы смежностей для графов.

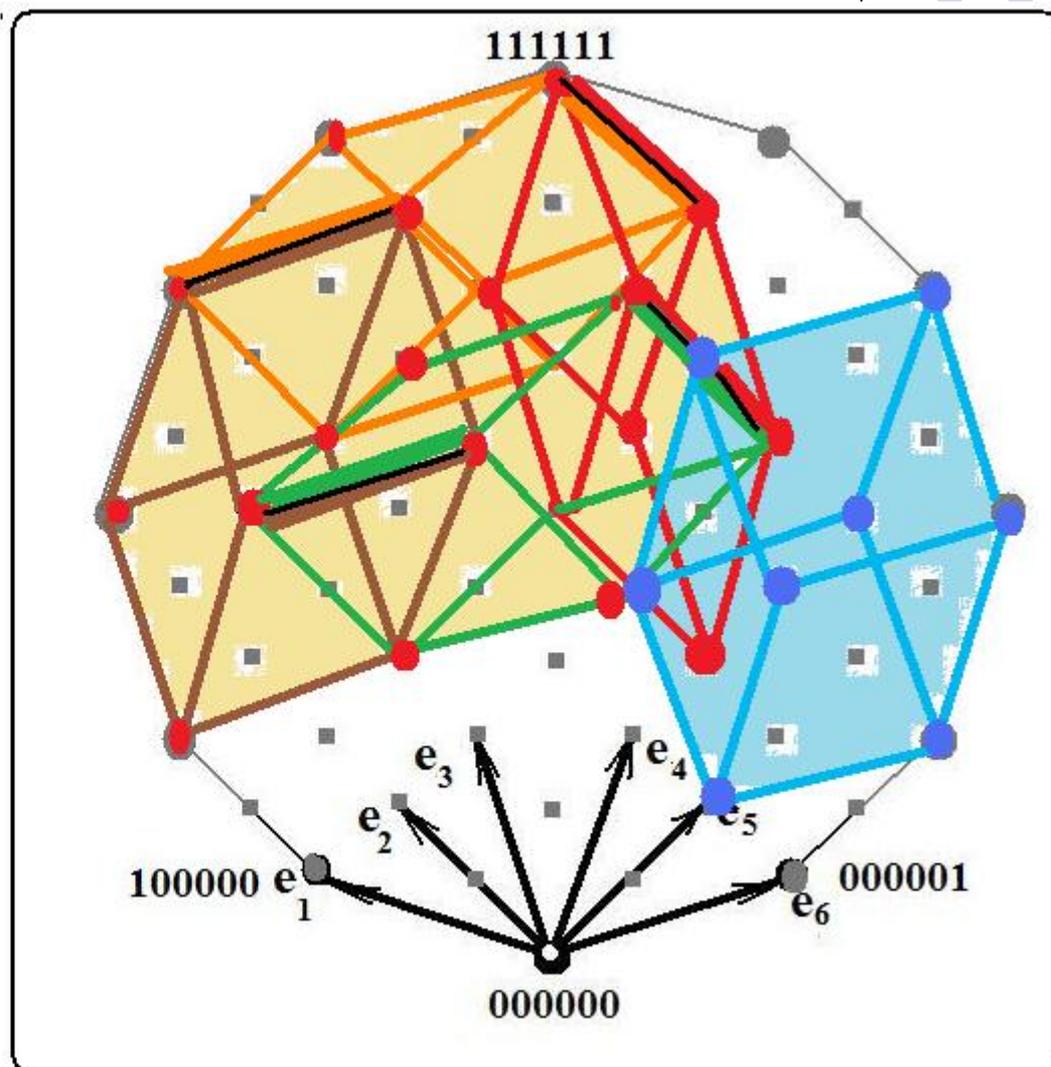
Графика предыдущего

примера

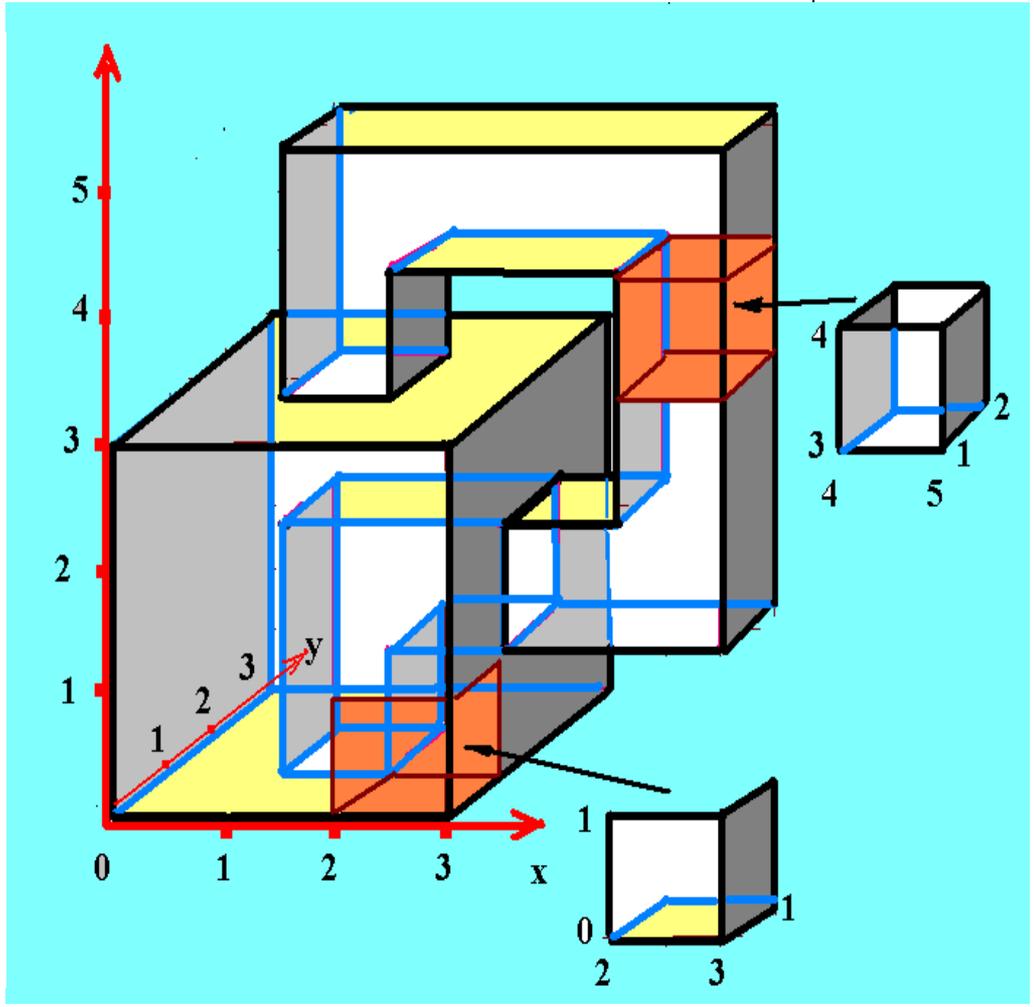
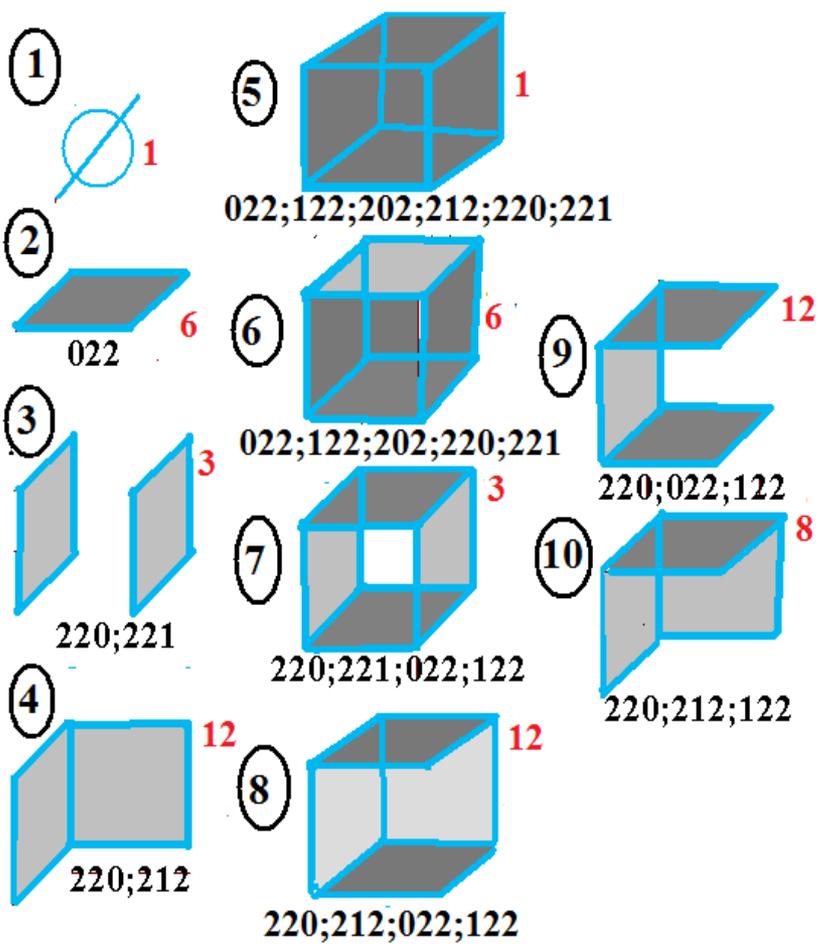


- D1=112202;
- D2=121122;
- D3=122211;
- D4=120122;
- D5=002212;

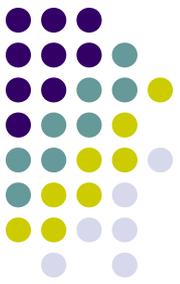
- $\Pi(D1,D2)=111102$;
- $\Pi(D1,D4)=110102$;
- $\Pi(D2,D3)=121111$;
- $\Pi(D3,D4)=120111$;



Кубическая бутылка Клейна из комплексов граней



Примеры других операций (операторов).



- Оператор границы кубанта \rightarrow множество кубантов, соответствующих гиперграням:
 $\partial(220120) = 020120, 120120, 200120, 210120, 220100, 220110; (\partial I^n = 2n I^{n-1});$
- Выпуклая оболочка множества кубантов \rightarrow кубант минимальной размерности, содержащий все кубанты множества:
 $\text{conv}(021200; 121120; 011200) = 221220;$

Хаусдорфова метрика на кубантах.



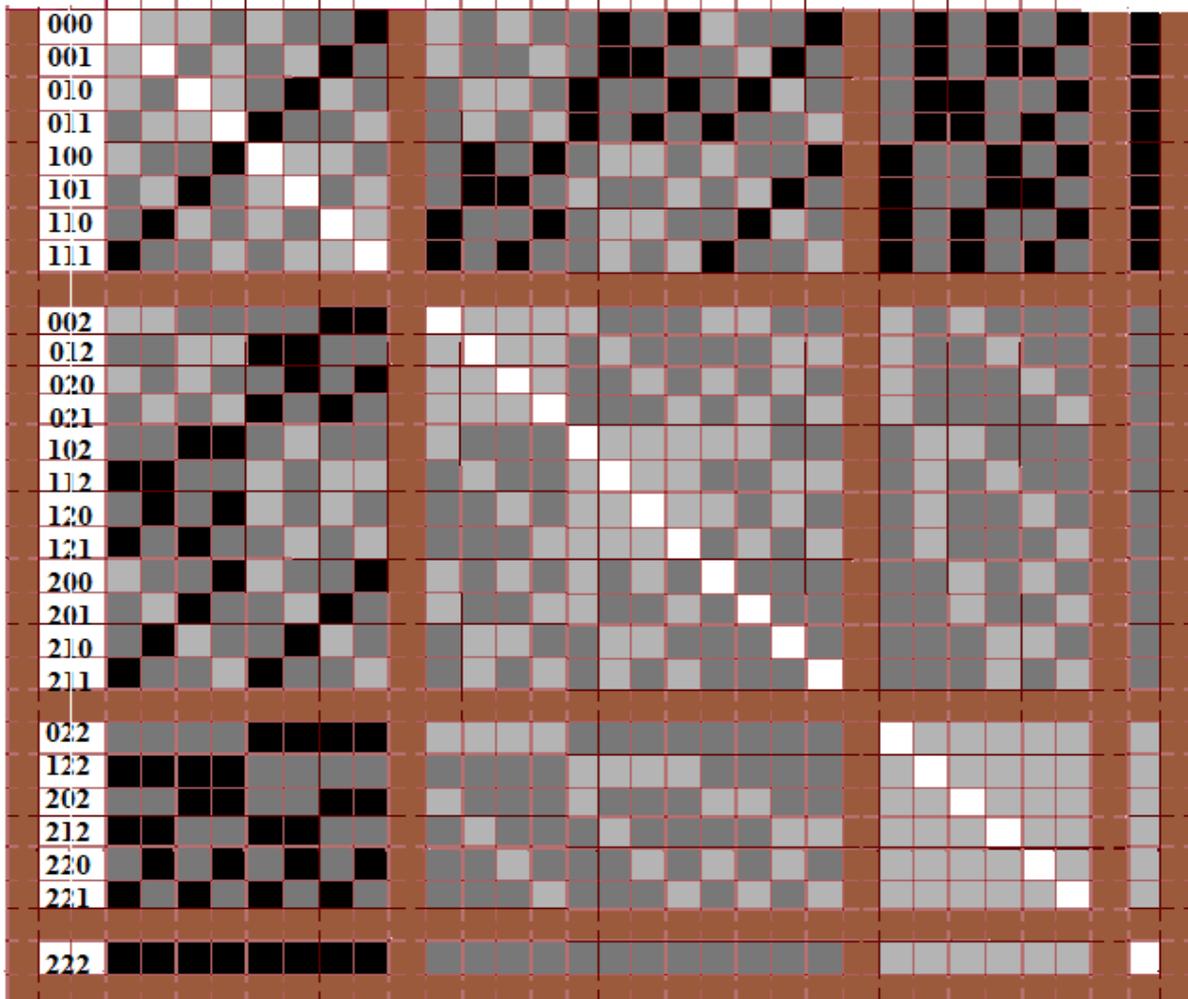
- $r_H(D1, D2) = \max\{ \max_{D1} Lmin(D1 \rightarrow D2); \max_{D2} Lmin(D2 \rightarrow D1) \};$
-
- $\max_{D1} Lmin(D1 \rightarrow D2) = Lmin(D1^*/D2 \rightarrow D2)$, где $D1^*/D2$ - хаусдорфово сжатие (вычисление самой далекой грани на $D1$ от $D2$)
- $\max_{D2} Lmin(D2 \rightarrow D1) = Lmin(D2^*/D1 \rightarrow D1);$
- $D1 = 020121; D2 = 121202; \Pi(D1, D2) = \emptyset 2 \emptyset 1 0 1 \rightarrow Lmin = 2;$
- $D1^*/D2 = 020111; \Pi(D1^*/D2, D2) = \emptyset 2 \emptyset 1 \emptyset 1 \rightarrow \max Lmin = 3;$
- $D2^*/D1 = 121000; \Pi(D2^*/D1, D1) = \emptyset 2 \emptyset \emptyset 0 \emptyset \rightarrow \max Lmin = 4;$
- $r_H(D1, D2) = \max\{3; 4\} = 4;$
- Хаусдорфова метрика – обобщение метрики Хэмминга.



Пример матрицы всех парных НН-расстояний кубантов для I³.

| | вершины | | | | | | ребра | | | | | | | | грани | | | | куб | | | | | | | | |
|--|---------|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|---|---|---|---|-------|---|---|---|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | | |

- Кубанты d-лексикографически упорядочены.
- Множество всех n-кубантов перечислимо.
- Черный- $r_{HH}=3$
- Тем.серый $r_{HH}=2$
- Св.серый $r_{HH}=1$
- Белый $r_{HH}=0$



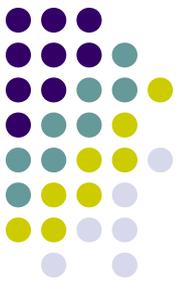
Общий вид матрицы (по минорам) парных НН-расстояний для для I^n .



- $H(I,J)$ -минор расстояний для кубантов размерностей I и J .
- $r[l,m]$ -диапазон значений r_{HH} ; $l < m$;

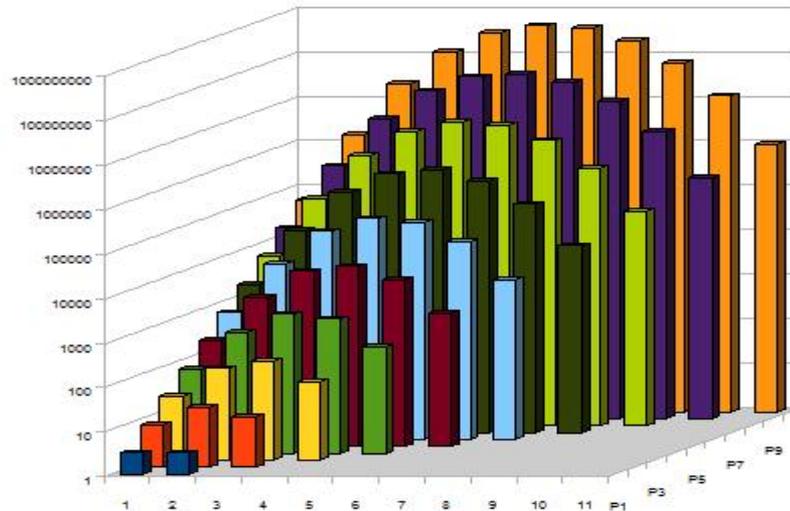
| | 0 | 1 | ... | n-2 | n-1 | n |
|-----|--|--|-----|--|--|-----|
| 0 | $\begin{matrix} 0 & H(0,0) \\ \dots & [0,n] \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(0,1) \\ r=[1,n] \end{matrix}$ | ... | $\begin{matrix} H(0,n-2) \\ r=[n-2,n] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(0,n-1) \\ r=[n-1,n] \end{matrix}$ | n |
| 1 | | $\begin{matrix} 0 & H(1,1) \\ \dots & [0,n-1] \\ 0 \end{matrix}$ | ... | $\begin{matrix} H(1,n-2) \\ r=[n-3,n-1] \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(1,n-1) \\ r=[n-2,n-1] \end{matrix}$ | n-1 |
| ... | | | ... | | | |
| n-2 | | | | $\begin{matrix} 0 & H(n-2,n-2) \\ \dots & r=[0,2] \\ 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} H(n-2,n-1) \\ r=[1,2] \end{matrix}$ | 2 |
| n-1 | | | | | $\begin{matrix} 0 & H(n-1,n-1) \\ \dots & r=[0,1] \\ 0 \end{matrix}$ | 1 |
| n | | | | | | 0 |

симметрия



Распределение r_{HH} для I^n $n=1-10$

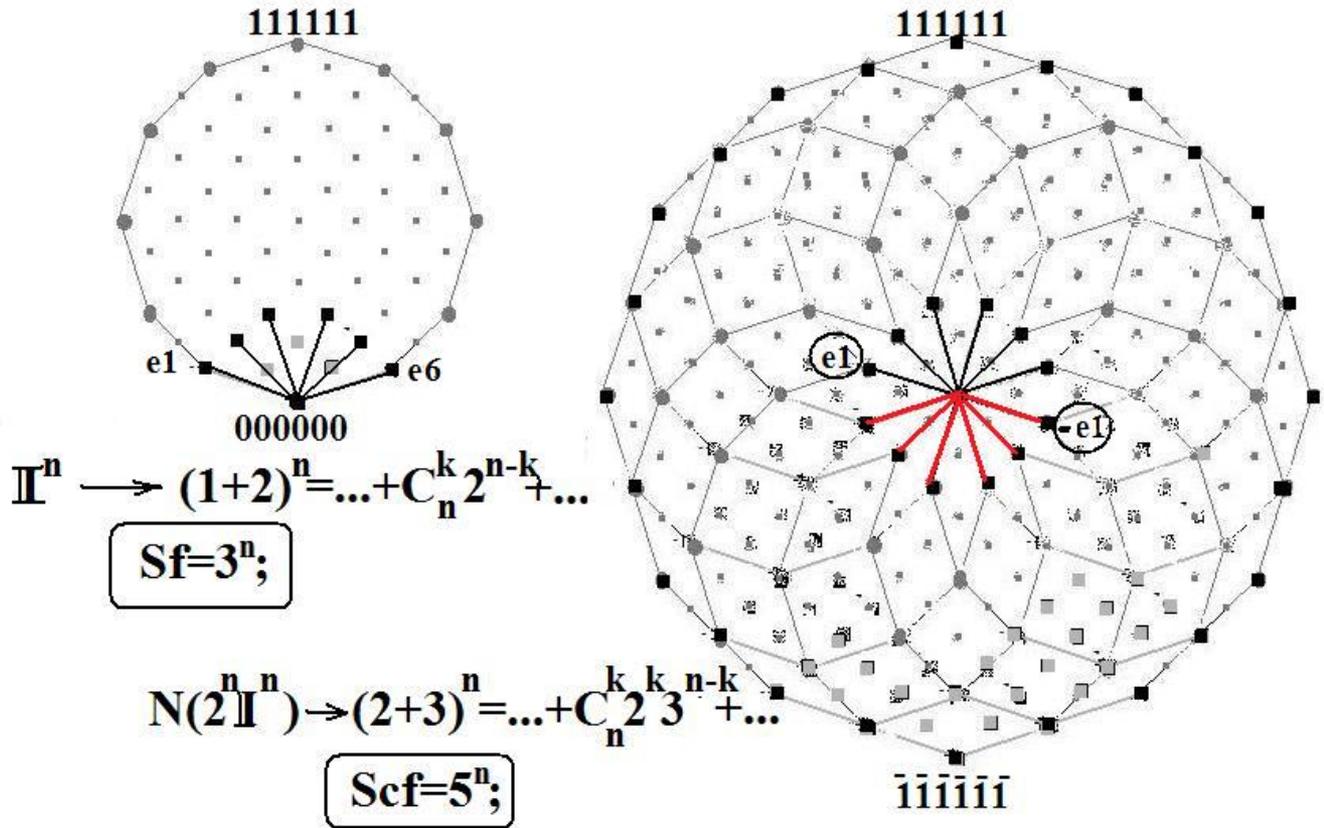
| | $r_{HH}(n)$ | | | | | | | | | | |
|----|-------------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 3 | 3 | | | | | | | | | |
| 2 | 9 | 22 | 14 | | | | | | | | |
| 3 | 27 | 117 | 174 | 60 | | | | | | | |
| 4 | 81 | 540 | 1380 | 1072 | 248 | | | | | | |
| 5 | 243 | 2295 | 8820 | 11480 | 5800 | 1008 | | | | | |
| 6 | 729 | 9234 | 49410 | 94960 | 78600 | 29088 | 4064 | | | | |
| 7 | 2187 | 35721 | 252882 | 667380 | 802200 | 476784 | 139104 | 16320 | | | |
| 8 | 6561 | 134136 | 1211112 | 4183200 | 6818000 | 5794432 | 2669184 | 644608 | 65408 | | |
| 9 | 19683 | 492075 | 5511240 | 24068016 | 50836464 | 57881376 | 37591680 | 14135040 | 2922624 | 261888 | |
| 10 | 59049 | 1771470 | 24078870 | 129509280 | 343148400 | 501544512 | 431417280 | 225876480 | 71925120 | 13043200 | 1048064 |



Кросс-кубанты и их кодирование.



- Алфавит для кросс-кубантов $\{-2,-1,0,1,2\}$.
- Расширенный алфавит: $\{W, \emptyset, -2,-1,0,1,2\}$
- Число кросс-кубантов 5^n .
- Моноид 7^n .

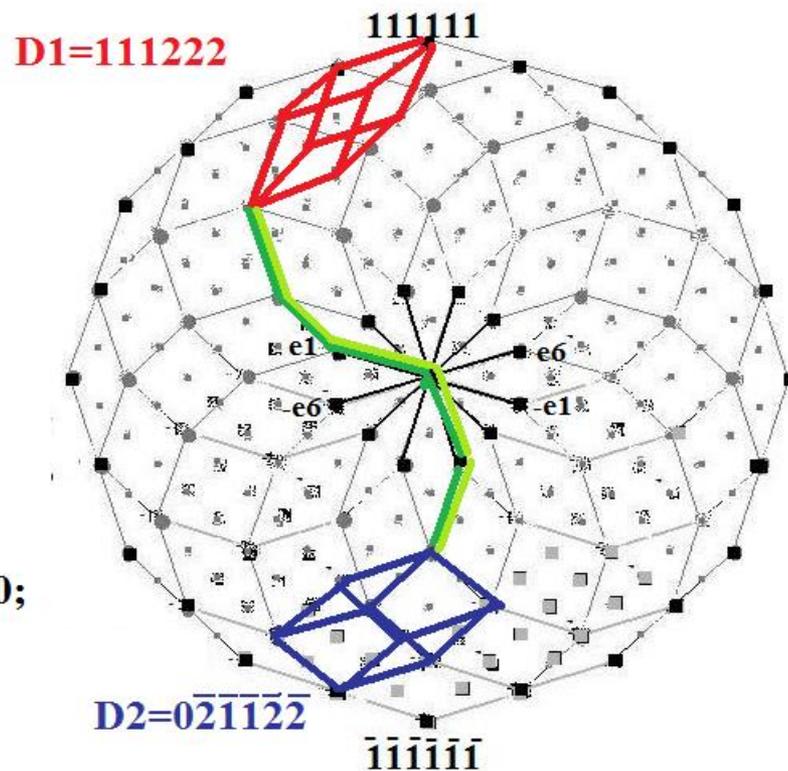
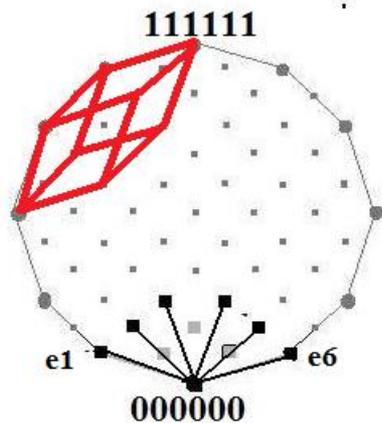




Умножение кросс-кубантов.

Таблица умножения кросс-кубантов.

| П | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|----|----|----|---|---|---|
| -2 | -2 | -1 | 0 | ∅ | 0 |
| -1 | -1 | -1 | ∅ | W | ∅ |
| 0 | 0 | ∅ | 0 | ∅ | 0 |
| 1 | ∅ | W | ∅ | 1 | 1 |
| 2 | 0 | ∅ | 0 | 1 | 2 |



$$\Pi(D1, D2) = \emptyset \emptyset W \emptyset 00;$$

$$1 \ 1 \ 2 \ 1$$

$$L_{\min}(D1, D2) = 5;$$

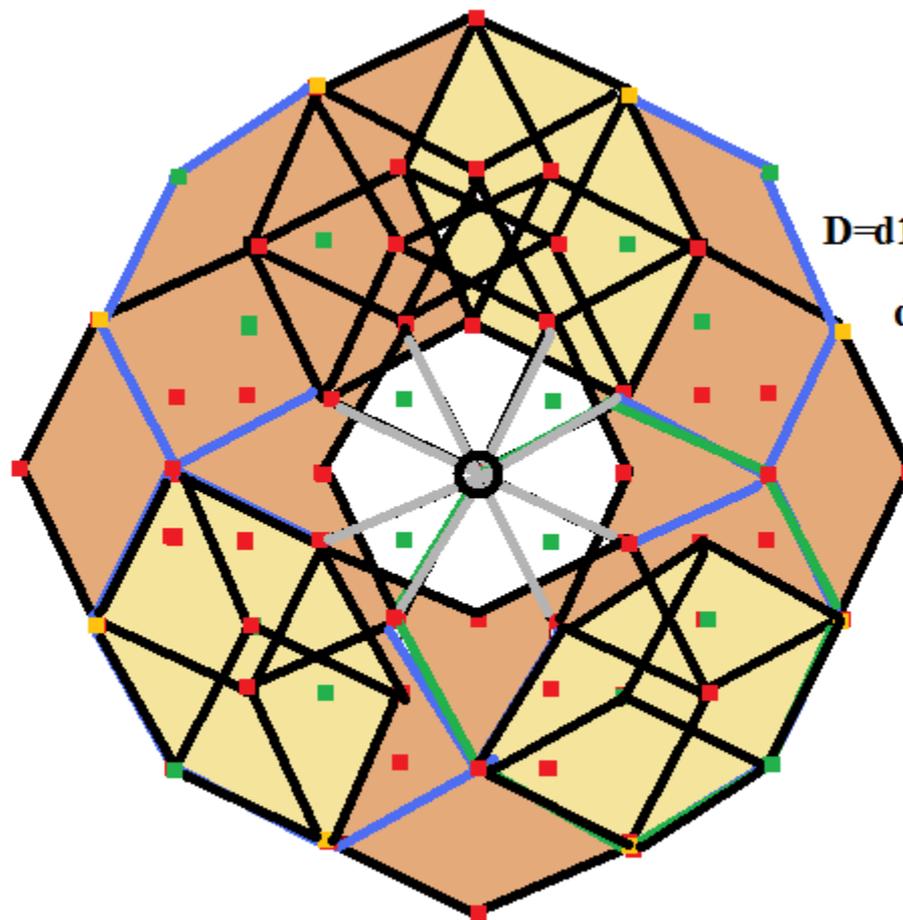
$$D2 = \overline{021122}$$

$$\overline{111111}$$



«Кубическая» 3-сфера $r_{HH}=4$ из кросс-кубантов.

- Кросс-кубанты образуют НН-метрическое пр-во.
- В НН-пространстве для конструкций из кросс-кубантов более широкие возможности. (центрально-симметричные построения).



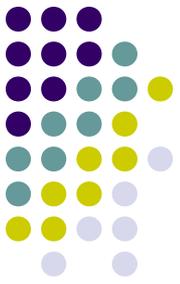
$D=d_1,d_2,d_3,d_4$

$d_i \in \{-2;-1;1;2\}$

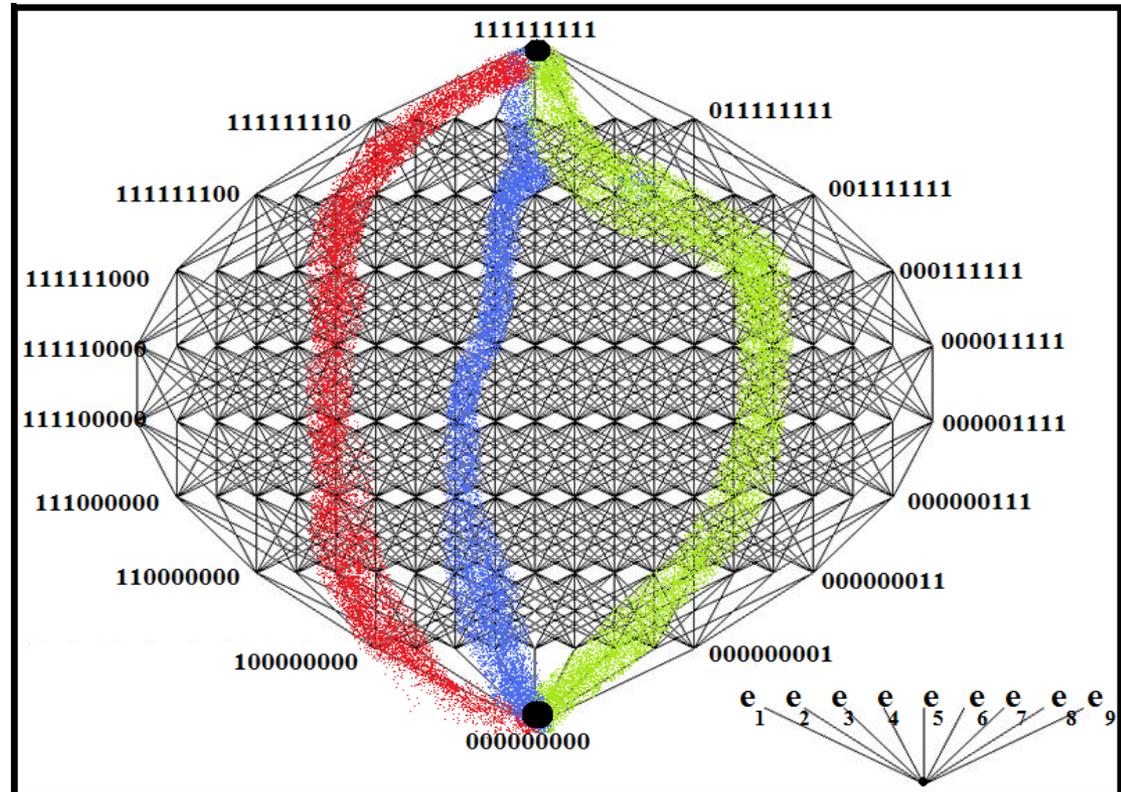
$\dim D=3;$

$S=64;$

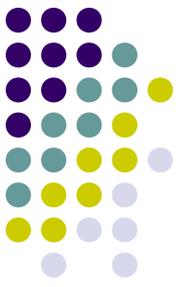
Задача прокладки многомерного «метро»



- Построить в 9d-кубе 3 непересекающихся кратчайших 3d тоннеля от «станции» 00...0 до «станции» 11...1.



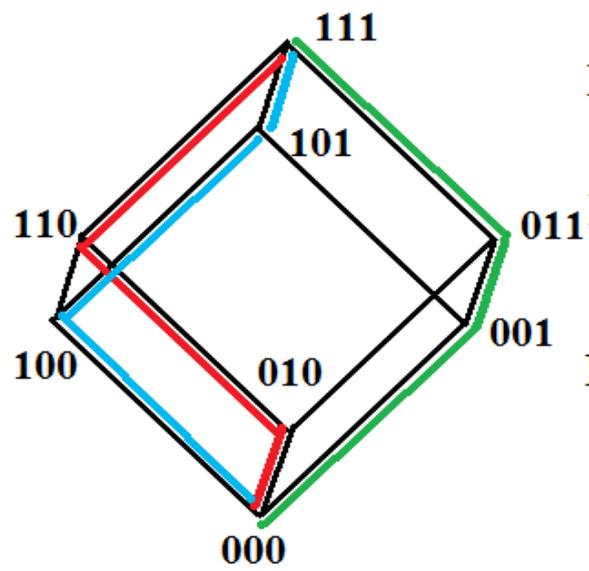
Формальная постановка.



- 3d тоннель-комплекс 3-кубантов, попарно пересекающихся по 2-кубантам. $K_i = \{D_{ij}\}; i=1, 2, 3;$
 $j=1-7; \dim D_{ij}=3; \dim \Pi(D_{ij}, D_{ij+1})=2;$
- Непересекающиеся тоннели-комплексы, не имеющие общих кубантов (за исключением конечных «станций» 00...0; 11...1;)
 $\Pi(D_{ij}, D_{kl}) = \emptyset; i \neq k;$ $\Pi(D_{11}, D_{21}, D_{31}) = 00...0;$
 $\Pi(D_{17}, D_{27}, D_{37}) = 11...1;$
- Кратчайшая длина-мин. число кубантов между «станциями» (в нашем случае 7).
- Построить-перечислить кубанты каждого комплекса.



Варианты для 3-куба.



K1 ■

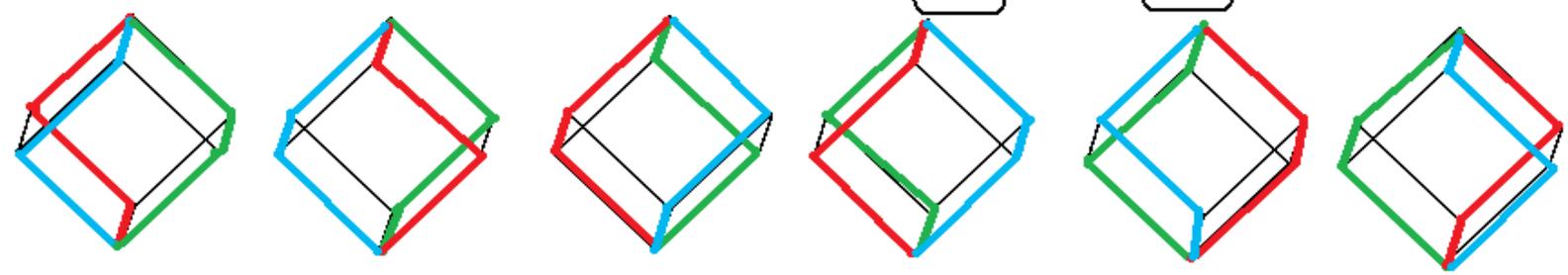
| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 002 | 020 | 002 | 020 | 200 | 200 |
| 021 | 012 | 201 | 210 | 102 | 120 |
| 211 | 211 | 121 | 112 | 121 | 112 |

K2 ■

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 020 | 002 | 200 | 200 | 002 | 020 |
| 210 | 201 | 120 | 102 | 021 | 012 |
| 112 | 121 | 112 | 121 | 211 | 211 |

K3 ■

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 200 | 200 | 020 | 002 | 020 | 002 |
| 102 | 120 | 012 | 021 | 210 | 201 |
| 121 | 112 | 211 | 211 | 112 | 121 |



$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$

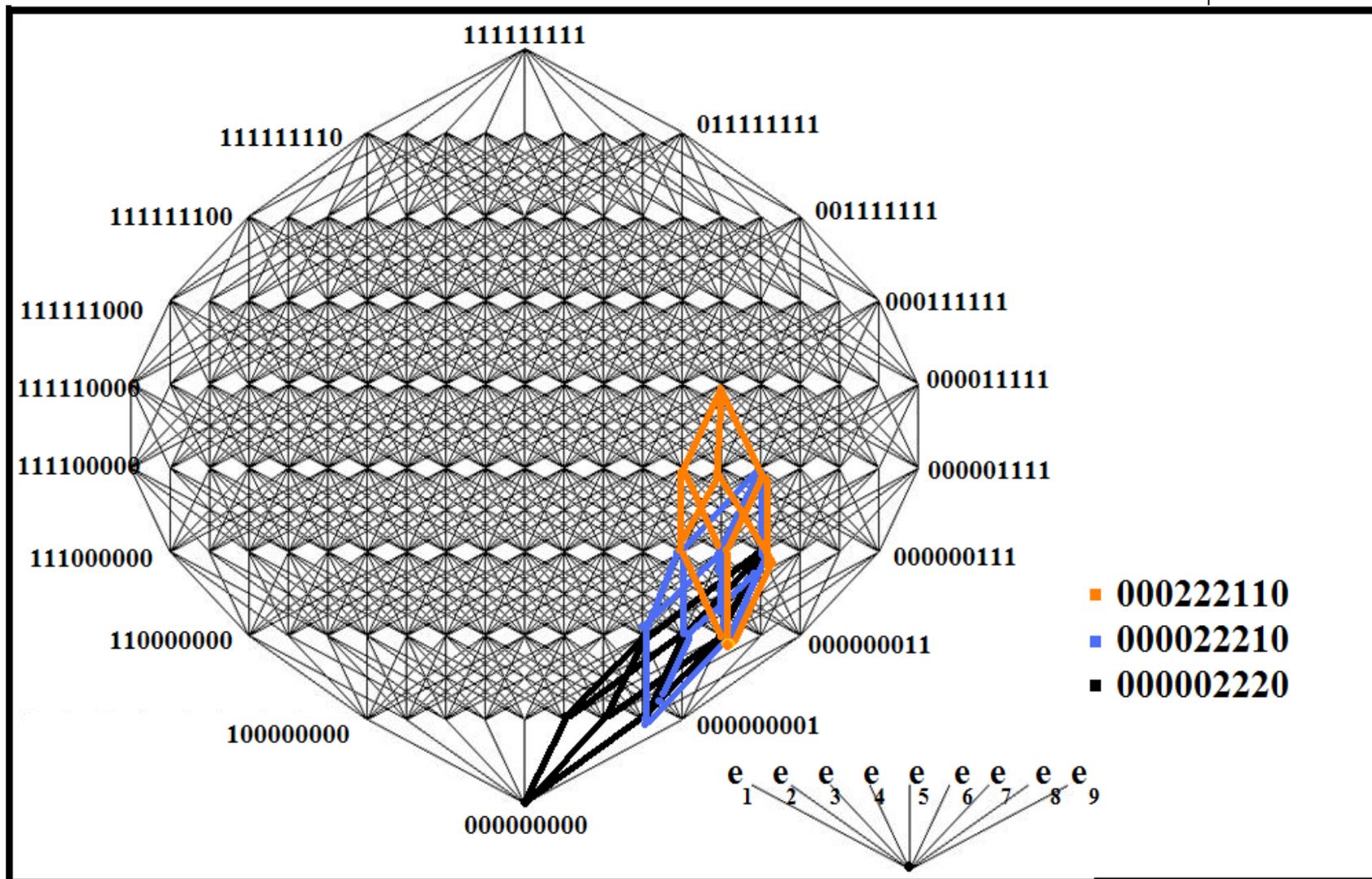
$\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}$

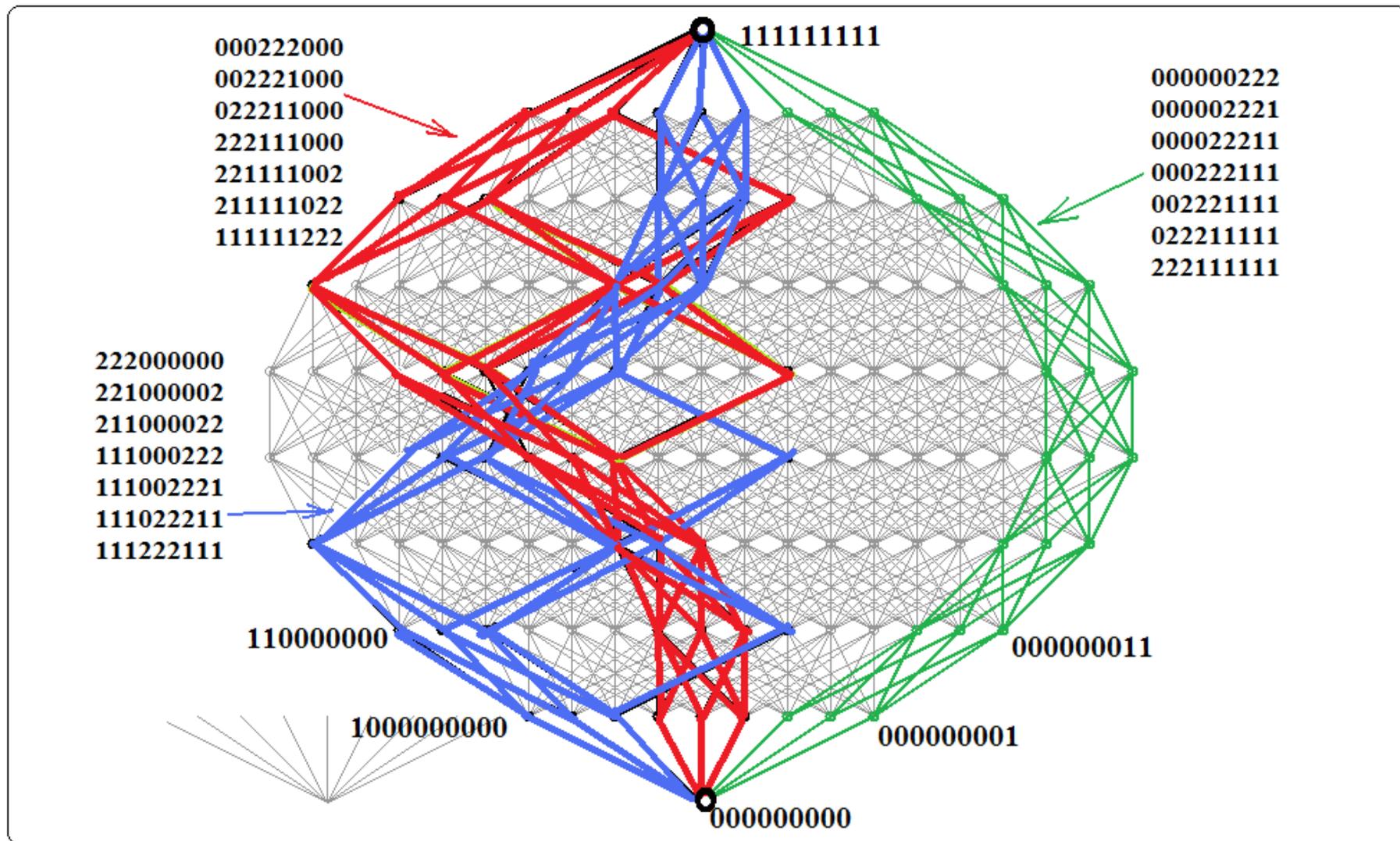
$\begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$

Пример звена «тоннеля»

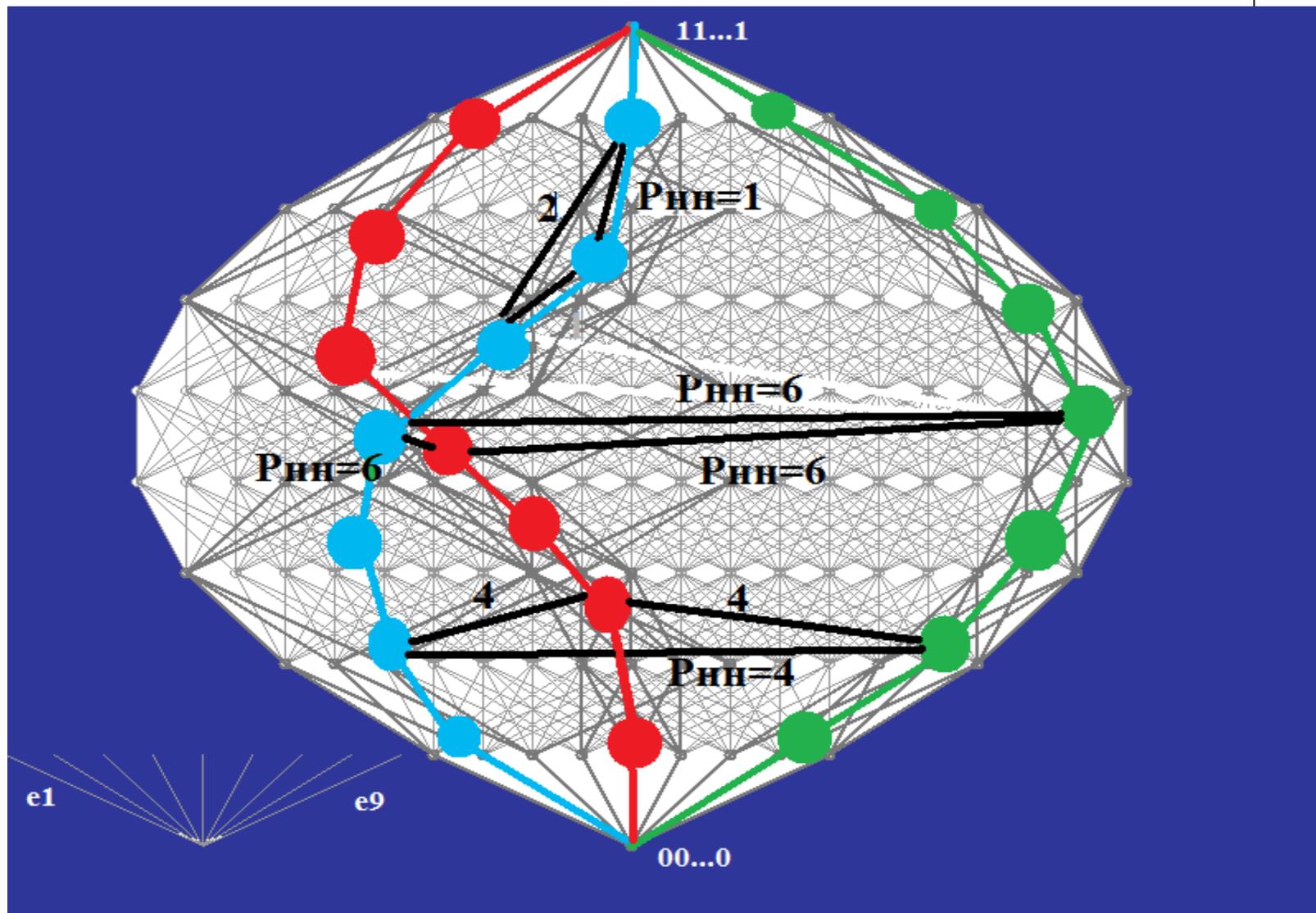


Алгебраическое решение и графическая интерпретация



НН-метрика между

«ТОННЕЛЯМИ»



Обход «дефектов».



- Три комплекса образуют $T(i,j,s)$; $i=1,2,3$; $j=1-7$; $s=1-9$;
- Выполнение начальных условий инвариантно к перестановке столбцов в $T(i,j,s)$.
- Для устранения вершины-дефекта 011111000 из K2 проводится перестановка столбцов 1 и 6 в K1,K2,K3.
- В общем случае оптимизации решение ищется на симметрической группе, действующей на множестве столбцов s .

011111000

$T(i,j,s)$

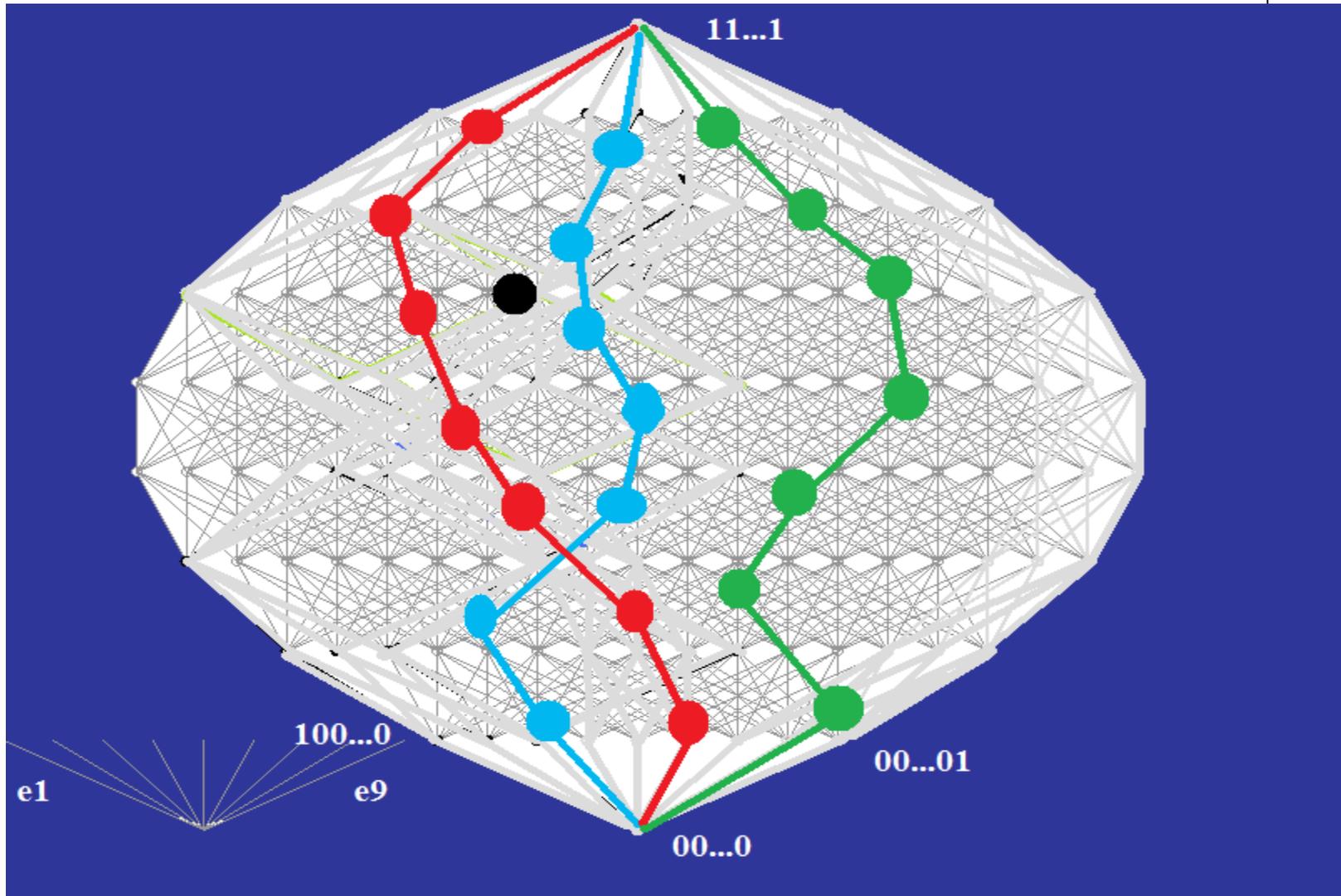
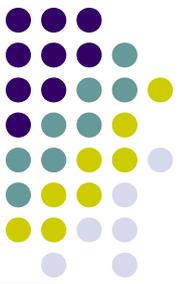
| | | |
|-----------|-----------|-----------|
| | 000222000 | 000000222 |
| | 002221000 | 000002221 |
| | 022211000 | 000022211 |
| K3 | K2 | K1 |
| 222000000 | 222111000 | 000222111 |
| 221000002 | 221111002 | 002221111 |
| 211000022 | 211111022 | 022211111 |
| 111000222 | 111111222 | 222111111 |
| 111002221 | | |
| 111022211 | | |
| 111222111 | | |

$p(s)=(1,6)$

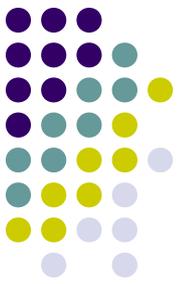
$T^*(i,j,s^*)$

| | | |
|------------|------------|------------|
| | 200220000 | 000000222 |
| | 102220000 | 200000221 |
| | 122210000 | 200020211 |
| K3* | K2* | K1* |
| 022002000 | 122112000 | 200220111 |
| 021002002 | 121112002 | 102220111 |
| 011002022 | 111112022 | 122210111 |
| 011001222 | 111111222 | 122112111 |
| 211001221 | | |
| 211021211 | | |
| 211221111 | | |

Бездефектные тоннели.

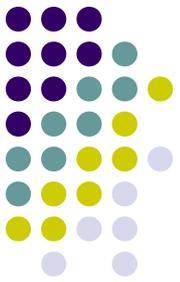


Полиморфное кодирование и особенности вычислений.



- Теория представлений, алгебраическая топология, метрическая геометрия, моноидальные категории, символьные вычисления.
- Кубант-слово, число, геометрический объект, элемент комплекса, точка метрического НН-пространства, элемент алгебраической структуры (моноида).
- Совмещенные (параллельные) вычисления- вычисление в одной операции метрических и топологических свойств и однотоктное поразрядное выполнение самой операции.
- Вычисление НН-метрики переведено из задачи сложности $O(2^n)$ в задачу сложности $O(n)$.
- Сложность операций над кубантами при возрастании n размерности пространства возрастает линейно, а число кубантов 3^n .

Черты архитектуры для супервычислений.

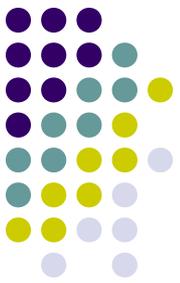


- Один из вариантов организации памяти-адресуемые максимально длинные строки байтов (символов).
- Логические поразрядные операции над строками (за один такт).
- Ассоциативные подсчеты символов в строках (число, адреса и т.д.)
- Перестановки (подстановки) символов в строках.

Общая схема работ по инструментальной системе «Топологический процессор»

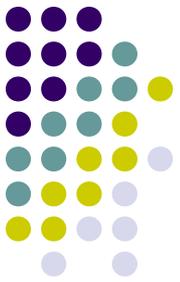


«Розетский камень» для будущего- всестороннее математическое и программное обеспечение суперкомпьютеров.



$\text{conv}(220012210;112011112;212000221;011012121) = 222022222;$
 $\text{conv}(020202112;020201111;020211111;020211122) = 020222112;$
 $\Pi_1(222022222;020222112)=020022112; \dim \Pi_1=4; 020022112=B;$
 022121 210001
 $\emptyset\emptyset 121 \emptyset 2211$
 111001 022)=02
 2211/01 $K^*=\{21$
 $\Pi_2(211 021110$
 211120 $L_{\min} =$
 $D1^*=\{1 021\}; D2$
 022101 000121
 $\emptyset 1\emptyset 11 01212/2$
 2111=1 $=\{2100$
 001212 $K3^*=\{1$
 $\dim D3 200112$
 $021120001;212100001;210211221\}; K5^*=\{210022112;221100010;20$
 $\dim D6=4; r_{HH}=5; \rightarrow D7=022221101; D8=100002222; D9=20212121$
 $\Pi_4(002212121;002201212)=0022\emptyset 1111; \Pi_5(001121121;210000121)$





Спасибо за внимание!

- Более детальная информация и ссылки на научные труды на сайте vizcom.ru