

Представление множества натуральных чисел в виде динамической системы дискретного времени

Г. Г. Рябов

Аннотация – Статья является продолжением тематики исследования структуры натуральных чисел. В статье дано представление множества натуральных чисел как динамической системы дискретного времени, и представлено построение фазового пространства системы на базе траекторий плоского бильярда и бильярдного графа. Рассматривается хромодинамика натуральных чисел. Дан вывод диофантовых уравнений селекции натуральных чисел на простые и составные.

Ключевые слова - динамическая система дискретного времени, бильярдный граф, фазовое пространство бильярдных траекторий, диофантовы уравнения селекции натуральных, метод Фейнмана.

I. ВВЕДЕНИЕ

Употребление термина «бильярдная траектория» является далеко не метафорой, достаточно указать основополагающую в этой области работу А.Л. Бунимовича, Я.Г. Синая, Н.И. Чернова [1], из которой ниже приведен первый абзац: «...свойства динамических систем, порождаемых свободным движением с упругими отражениями от границы. Такие системы называются бильярдами.

Определение. Пусть Q -ограниченная область с кусочно-гладкой границей в евклидовой плоскости R^2 . Бильярдом называется динамическая система, порожденная движением точечной частицы с постоянной единичной скоростью внутри Q и упругими отражениями от границы ∂Q . Под

упругим отражением, как обычно, понимается такое, при котором угол падения равен углу отражения».

В рассматриваемом случае граница области ∂Q - кусочно-линейная. Предметный прообраз границы - 3 борта бильярдного стола (без луз для игры в «карамболь») и полубесконечная протяженность самого стола (рис. 1). Прообразом точки может служить движение бильярдного шара, пущенного под углом $\pi/4$ к границе и его незатухающие отражения от бортов, уходящие в бесконечность.

Нижеследующему изложению предшествовали работы, опубликованные в 2015-2017 гг. [2,3], результаты которых будут использованы. Ссылки на конкретные результаты будут даны в процессе изложения.

Предложено представление множества всех натуральных чисел в виде бесконечной таблицы $T(N/6)$ из 6 строк. Каждая строка является последовательностью членов бесконечной арифметической прогрессии с разностью $d=6$ и начальными членами соответственно 2, 3, 4, 5, 6, 7. Обозначения множеств членов каждой строки:

$S(2/6); S(3/6); S(4/6); S(5/6); S(6/6); S(7/6);$

Эти множества образуют две полугруппы по сложению и умножению [2]. Таблицы действий этих полугрупп представлены в Табл. 1.

Бинарные отношения между $S(2/6)$ - $S(7/6)$ по сложению и умножению.

+		$S(2/6)$	$S(3/6)$	$S(4/6)$	$S(5/6)$	$S(6/6)$	$S(7/6)$
	$S(2/6)$	$S(4/6)$	$S(5/6)$	$S(6/6)$	$S(7/6)$	$S(2/6)$	$S(3/6)$
	$S(3/6)$	$S(5/6)$	$S(6/6)$	$S(7/6)$	$S(2/6)$	$S(3/6)$	$S(4/6)$
	$S(4/6)$	$S(6/6)$	$S(7/6)$	$S(2/6)$	$S(3/6)$	$S(4/6)$	$S(5/6)$
	$S(5/6)$	$S(7/6)$	$S(2/6)$	$S(3/6)$	$S(4/6)$	$S(5/6)$	$S(6/6)$
	$S(6/6)$	$S(2/6)$	$S(3/6)$	$S(4/6)$	$S(5/6)$	$S(6/6)$	$S(7/6)$
	$S(7/6)$	$S(3/6)$	$S(4/6)$	$S(5/6)$	$S(6/6)$	$S(7/6)$	$S(2/6)$

X		$S(2/6)$	$S(3/6)$	$S(4/6)$	$S(5/6)$	$S(6/6)$	$S(7/6)$
	$S(2/6)$	$S(4/6)$	$S(6/6)$	$S(2/6)$	$S(4/6)$	$S(6/6)$	$S(2/6)$
	$S(3/6)$	$S(6/6)$	$S(3/6)$	$S(6/6)$	$S(3/6)$	$S(6/6)$	$S(3/6)$
	$S(4/6)$	$S(2/6)$	$S(6/6)$	$S(4/6)$	$S(2/6)$	$S(6/6)$	$S(4/6)$
	$S(5/6)$	$S(4/6)$	$S(3/6)$	$S(2/6)$	$S(7/6)$	$S(6/6)$	$S(5/6)$
	$S(6/6)$	$S(6/6)$	$S(6/6)$	$S(6/6)$	$S(6/6)$	$S(6/6)$	$S(6/6)$
	$S(7/6)$	$S(2/6)$	$S(3/6)$	$S(4/6)$	$S(5/6)$	$S(6/6)$	$S(7/6)$

В аддитивной полугруппе роль "0" выполняет $S(6/6)$, в мультипликативной полугруппе роль "1" выполняет $S(7/6)$.
Полугруппы -конечные(по 6 инфинитарных членов).

Таблица 1.

Доказано [2], что множества этих строк не пересекаются (не содержат одинаковых натуральных) и объединение этих множеств даёт все натуральные числа. Таким образом, каждое натуральное число получает двумерное представление: номер строки (прогрессии) в таблице $T(N/6)$ и номер натурального в строке (в прогрессии).

II. ПОСТРОЕНИЕ БИЛЛИАРДНОГО ГРАФА

На основании таблицы $T(N/6)$ предложено построение так называемого «графа бильярдных траекторий» или просто «*бильярдного графа*» - BG .

Вершины графа BG маркированы натуральными из $T(N/6)$ и располагаются в узлах стандартной плоской квадратной решетки. Соседние по диагонали решетки вершины соединяются ориентированным ребром. Ориентация ребер – от вершины с меньшим натуральным к вершине с большим натуральным (рис. 1).

На множестве натуральных, принадлежащих прогрессиям $S(5/6)$; $S(6/6)$; $S(7/6)$ (в полосе таблицы $T(N/6)$ из трех строк) и соответствующих им вершин строящегося BG .

Рассматриваются инцидентные ребра и на них вводятся специальные целочисленные функции: синус бильярдный, косинус бильярдный, и симметричные к ним [4,5] синус бильярдный зеркальный и косинус бильярдный зеркальный.

Область определения данных функций – множество $S(6/6)$. Область принимаемых значений: объединение $S(5/6)$; $S(6/6)$; $S(7/6)$. Период функций – 24 (рис. 2).

Функции попарно ортогональны и покрывают все ребра BG в полосе $S(5/6)$; $S(6/6)$; $S(7/6)$. Таким образом, если дать окраску ребрам каждой функции, то все ребра будут окрашены только в 4 цвета (красный - sov , синий – sib , зеленый – sov , желтый – sib). Теперь каждая вершина BG имеет инцидентные ребра либо одного цвета, либо двух цветов (рис. 3). В зависимости от этого каждой вершине BG присваивается либо один цвет (монохромные вершины), либо два цвета инцидентных ребер (дихромные вершины).

При этом монохромные вершины содержат все простые натуральные, так как принадлежат к $S(5/6)$ и $S(7/6)$ (рис. 4).

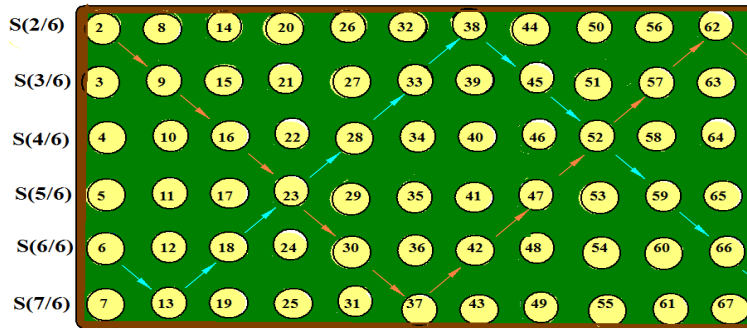


рис.1. Примеры бильярдных траекторий при ударах по шару под углом $\pi/4$ по отношению к борту.

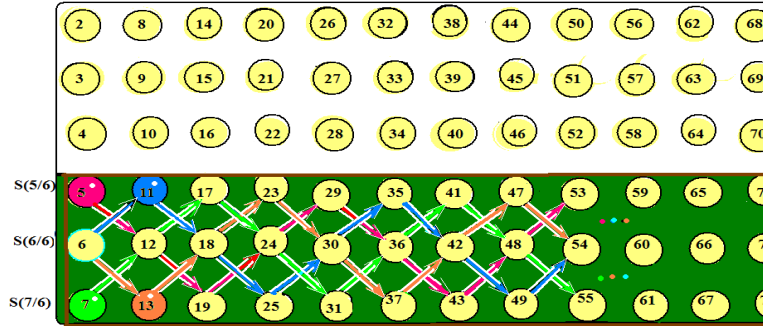


рис.2. Периодические функции в полосе $S(5/6), S(6/6), S(7/6)$.

$sib(6)=6; sib(12)=11; sib(18)=18; sib(24)=25; sib(30)=30; \dots$ (blue arrow)
 $cob(6)=5; cob(12)=12; cob(18)=19; cob(24)=24; cob(30)=29; \dots$ (red arrow)
 $\underline{sib}(6)=6; \underline{sib}(12)=13; \underline{sib}(18)=18; \underline{sib}(24)=23; \underline{sib}(30)=30; \dots$ (orange arrow)
 $\underline{cob}(6)=7; \underline{cob}(12)=12; \underline{cob}(18)=17; \underline{cob}(24)=24; \underline{cob}(30)=31; \dots$ (green arrow)

Период функций- 24.

$sib, \underline{sib}, cob, \underline{cob}$ определяют цвета ребер BG в полосе $S(5/6), S(6/6), S(7/6)$.

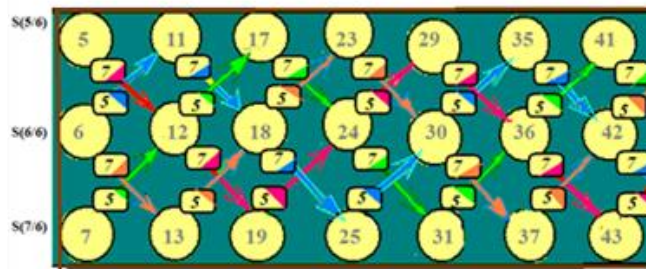


рис.3 \square веса на ребрах BG ; модуль разности натуральных инцидентных вершин.

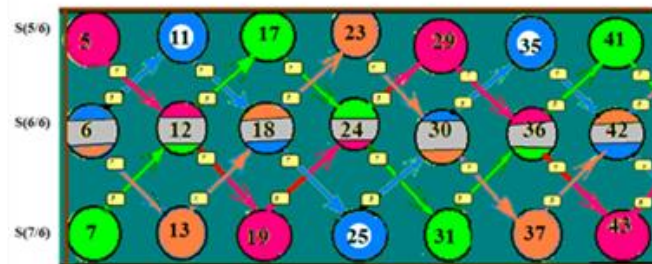


рис.4 окраска вершин BG в зависимости от цвета инцидентных ребер: совпадающих цветов-монохромные вершины, двух различных цветов-дихромные.

Теперь введем веса q для каждого ребра BG . Вес каждого ребра положим равным

$$q=|n_1 - n_2|,$$

где n_1 и n_2 – натуральные в вершинах BG , инцидентных данному ребру.

Легко видеть, что q принимает только 2 значения: $q_1 = 5$ (для ребер с ориентацией вверх) и $q_2 = 7$ (для ребер с ориентацией вниз). Общая картина полосы $S(5/6)$; $S(6/6)$; $S(7/6)$ как BG выглядит на рис. 4. Таким образом, можно говорить о периодической смене окраски вершин BG , а, следовательно, о *хромодинамике* натуральных – НХД.

Итого имеется 6 красок: 4 монохромных (красный, зеленый, синий, желтый) и 2 дихромных (красно-зеленый и сине-желтый). На этом построение BG - (ориентированного, ациклического, полихромного) завершается.

III. ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ДИСКРЕТНОГО ВРЕМЕНИ

Фактически BG содержит все билиардные траектории при упругих отражениях от бортов под углом $\pi/4$, т.е. является фазовым пространством динамической системы дискретного времени [4].

Движение по ориентированным ребрам билиардной траектории одного цвета (в полосе $S(5.6)$, $S(6.6)$, $S(7.6)$) сопровождается суммированием весов q тех ребер, в которых оказывается *динамическая система в моменты дискретного времени-DSDT* (на одно ребро тратится единица дискретного времени). Представление динамической системы в виде слов конечного алфавита с привязкой к дискретному времени t можно показать следующим образом. Пусть дан конечный алфавит $A=\{5;7;v;\wedge\}$ 5,7 - веса ребер BG ; v - символ отражения траектории от нижнего борта, \wedge - символ отражения траектории от верхнего борта. Первая строка – моменты дискретного

времени t (0,1,2,3,...), вторая строка - поведение траектории, вышедшей из вершины, маркированной натуральным 5 (красная), третья строка - поведение траектории из вершины с натуральным 7(зеленая), четвертая строка - поведение траектории из вершины с натуральным 11(синяя) и пятая строка - из вершины с натуральным 13 (желтая):

$$\begin{aligned} & t012345678901234567890123456789 \\ & 577v55^77v55^77v55^77v55^77v \\ & 755^77v55^77v55^77v55^77v55^77v \\ & 1177v55^77v55^77v55^77v55^77v55 \\ & 1355^77v55^77v55^77v55^77v55 \end{aligned} \quad (1)$$

Суммируя веса ребер вдоль траекторий, мы по существу реализуем *дискретный вариант интегрирования по траекториям Фейнмана* [6] только в нашем случае это суммирование весов, которое можно представить в форме

$$n(t_0) + \sum q(t_i) \Delta t_i = n(T),$$

$$\text{где } T = \sum \Delta t_i;$$

Поскольку для нашего случая q принимает только два значения ($q_1=5; q_2=7;$), $\Delta t_i=1$; и всего 4 траектории с исходными вершинами с натуральными: $n_{01}(t_0)=5$; $n_{02}(t_0)=7$; $n_{03}(t_0)=11$; $n_{04}(t_0)=13$; выберем более простую форму, а именно:

$$n_{0i}(t_0) + 5x_i + 7y_i = n(T);$$

$$n_{0i}(t_0), n(T) \in \text{траектории одного цвета,}$$

$$i=1, 2, 3, 4;$$

(2)

Эта есть форма диофантова уравнения, где x_i – число дискретных единиц времени пребывания DSDT в вершинах с $q=5$, а y_i – в вершинах с $q=7$.

Если будет доказано, что уравнение (А) имеет целочисленные решения и при каких условиях, когда $n(T)$ - простые - то будет получена **безрешеточная процедура селекции простых и составных** (будут применяться символы \backslash - а делит $b:a\backslash b$; χ -а не делит $b: a\chi b$).

Итак, случай, когда $n(T)$ - простое. $(5x+7y)$ может быть либо простым, либо составным. В случае составного возможны 4 варианта:

1. x и y не взаимно просты $(x, y) \neq 1$; отсюда при $(5x+7y)$ - несоставном должно выполняться: $(x, y) = 1$;
2. 5 делит $(5x+7y): 5 \backslash (5x+7y)$; отсюда при $(5x+7y)$ - несоставном должно выполняться: 5 не делит $7y: 5\chi 7y$, что равносильно 5 не делит $y: 5\chi y$.
3. 7 не делит $(5x+7y): 7\chi (5x+7)$ и далее аналогично 2. и 7 не делит $x: 7\chi x$;
4. при 5 делит $(5x+7y): 5 \backslash (5x+7y)$ и 7 делит $(5x+7y): 7 \backslash (5x+7y)$, учитывая 2. и 3., имеем 5 не делит $y: 5\chi y$, 7 не делит $x: 7\chi x$.

Итак $(5x+7y)$ – несоставное (т.е. **простое**) только если **5 не делит y и 7 не делит x** . Учитывая парность следования по траекториям 55 и 77, x и y **всегда четные** и в отношении или $x=y$ или $x-y=2$.

Ниже показаны решения соответствующих диофантовых уравнений для всех четырех траекторий и селекция простых и составных в $S(5/6)$ и $S(7/6)$. (В других $S(. / 6)$ простых нет совсем). Поэтому будем называть рассматриваемые уравнения вместе с условиями делимости **диофантовыми уравнениями селекции натуральных на простые и составные**.

Для красной траектории, исходящей из вершины с натуральным 5:

$$5+7x_1+5y_1=z_1; x_1=y_1 \text{ или } x_1-y_1=2; \quad (3)$$

z_1 -простое, если только если $7\chi 5y_1$ и $5\chi 7x_1$; иначе z_1 - составное;

Для зеленой траектории, исходящей из вершины с натуральным 7:

$$7+5x_2+7y_2=z_2; x_2=y_2 \text{ или } x_2-y_2=2; \quad (4)$$

z_2 -простое, если и только если $7\chi 5x_2$ и $5\chi 7y_2$; иначе z_2 - составное;

Для синей траектории, исходящей из вершины с натуральным 11:

$$11+7x_3+5y_3=z_3; x_3=y_3 \text{ или } x_3-y_3=2; \quad (5)$$

z_3 -простое, если и только если $7\chi(11+5y_3)$ и $5\chi(11+7x_3)$; иначе z_3 - составное;

Для желтой траектории, исходящей из вершины с натуральным 13:

$$13+5x_4+7y_4=z_4; x_4=y_4 \text{ или } x_4-y_4=2; \quad (6)$$

z_4 -простое, если и только если $7\chi(13+5x_4)$ и $5\chi(13+7y_4)$; иначе z_4 - составное;

Воспользуемся (1) для проставления промежуточных сумм весов ребер по каждой из 4-х траекторий, отмечая простые толстым черным, а составные - толстым красным цветом (веса ребер даны курсивом).

577195529774355537767557777915
510177115551257713955149771635
 $5^{77} \vee 55^{77} \dots$
75517773155417755565777955897
710355113771275513777151551617
 $7 \vee 55^{77} \vee 55 \dots$
117725553577495559777355837797
551077712155131771455515577169
 $55^{77} \vee 55^{77} \dots$
135523773755477761557177855595
771095511977133551437715755167
 $7718155^{77} \vee 55 \dots$

В таблице 2 приведены решения диофантовых уравнений с выполнением (простые) и нарушением условий делимости (составные).

Решения диофантовых уравнений с селекцией на простые и составные на множествах $S(5/6)$ и $S(7/6)$; $n < 400$;

$5+7x_1+5y_1$;			$7+5x_2+7y_2$;			$11+7x_3+5y_3$;			$13+5x_4+7y_4$;		
x_1	y_1	p/c	x_2	y_2	p/c	x_3	y_3	p/c	x_4	y_4	p/c
0	0	5 ■	0	0	7 ■	0	0	11 ■	0	0	13 ■
2	0	19 ■	2	0	17 ■	2	0	25 ■	2	0	23 ■
2	2	29 ■	2	2	31 ■	2	2	35 ■	2	2	37 ■
4	2	43 ■	4	2	41 ■	4	2	49 ■	4	2	47 ■
4	4	53 ■	4	4	55 ■	4	4	59 ■	4	4	57 ■
6	4	67 ■	6	4	65 ■	6	4	73 ■	6	4	71 ■
6	6	77 ■	6	6	79 ■	6	6	77 ■	6	6	81 ■
8	6	91 ■	8	6	89 ■	8	6	97 ■	8	6	95 ■
8	8	101 ■	8	8	103 ■	8	8	107 ■	8	8	109 ■
10	8	115 ■	10	8	113 ■	10	8	121 ■	10	8	123 ■
10	10	125 ■	10	10	127 ■	10	10	131 ■	10	10	133 ■
12	10	139 ■	12	10	137 ■	12	10	145 ■	12	10	147 ■
12	12	149 ■	12	12	151 ■	12	12	155 ■	12	12	157 ■
14	12	173 ■	14	12	161 ■	14	12	169 ■	14	12	171 ■
14	14	183 ■	14	14	175 ■	14	14	179 ■	14	14	181 ■
16	14	187 ■	16	14	185 ■	16	14	193 ■	16	14	195 ■
16	16	197 ■	16	16	199 ■	16	16	203 ■	16	16	205 ■
18	16	211 ■	18	16	209 ■	18	16	217 ■	18	16	219 ■
18	18	221 ■	18	18	223 ■	18	18	227 ■	18	18	229 ■
20	18	235 ■	20	18	233 ■	20	18	241 ■	20	18	239 ■
20	20	245 ■	20	20	247 ■	20	20	251 ■	20	20	253 ■
22	20	259 ■	22	20	257 ■	22	20	265 ■	22	20	263 ■
22	22	269 ■	22	22	271 ■	22	22	275 ■	22	22	277 ■
24	22	283 ■	24	22	281 ■	24	22	289 ■	24	22	287 ■
24	24	293 ■	24	24	295 ■	24	24	299 ■	24	24	301 ■
26	24	307 ■	26	24	305 ■	26	24	313 ■	26	24	311 ■
26	26	317 ■	26	26	319 ■	26	26	323 ■	26	26	325 ■
28	26	331 ■	28	26	329 ■	28	26	337 ■	28	26	335 ■
28	28	341 ■	28	28	343 ■	28	28	347 ■	28	28	349 ■
30	28	355 ■	30	28	353 ■	30	28	361 ■	30	28	359 ■
30	30	365 ■	30	30	367 ■	30	30	371 ■	30	30	373 ■
32	30	379 ■	32	30	377 ■	32	30	385 ■	32	30	383 ■
32	32	389 ■	32	32	391 ■	32	32	395 ■	32	32	397 ■
34	32	403 ■	34	32	401 ■	34	32	409 ■	34	32	407 ■

табл. 2 ■ простые ■ составные

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко предложенный метод можно характеризовать как представление множества натуральных чисел в виде динамической системы дискретного времени и построение для нее на базе билиардного графа пространства фазовых траекторий. Связанные с ней **диофантовы уравнения**, составленные с помощью дискретного варианта метода Фейнмана интегрирования по фазовым траекториям, дают **безрешеточную процедуру селекции натуральных на простые и составные**.

Из других следствий представления множества натуральных как динамической системы отметим элементы **биекции** между квантовой хромодинамикой (**КХД**) и хромодинамикой натуральных (**НХД**), проявляемые в явлениях **конфайнмента** и затухания **конфайнмента (деконфайнмента)**, вариант динамической системы **трехмерного билиарда на поверхности цилиндра и периодический закон хромодинамики натуральных чисел**.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Бунимович Л.А., Синай Я.Г., Чернов Н.И. // Статистические свойства двумерных гиперболических билиардов. Успехи мат. наук, т. 46, вып. 4 (280), 1991.
- [2] Ryabov G.G, Serov V.A. On natural numbers structure on the basis of six arithmetical progressions. International Journal of Open Information Technologies. 2016. vol.4. no 4. pp.49-53. Available (in Russian). <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/277>.
- [3] Ryabov G.G, Serov V.A. Infinite arithmetical progressions and global trees in natural numbers structure. International Journal of Open Information Technologies. 2017. vol. 5.

no 6. pp. 1-5. Available (in Russian). <http://injoit.org/index.php/j1/article/view/441>.

- [4] Вейль Г. // Симметрия. – М.: Наука, 1968.
- [5] Пуанкаре А. // О науке. Книга 1. Будущее математики. С введением Л.С.Понтрягина. - М.: Наука. 1990.
- [6] Аносов Д.В. Гладкие динамические системы // Итоги науки и техн. сер. соврем. пробл. мат. фундам. направления. Том 1. 1985.
- [7] Фейнмановские лекции по физике [электронный ресурс] <http://www.all-fizika.com/art>.

Representation of the natural numbers set as a dynamical discrete time system

G. G. Ryabov

Abstract – The article is continuing the theme of study of the structure of natural numbers. The article represents the natural numbers set as a dynamical system in discrete time, and presents the construction of the system phase space on the basis of the flat trajectories of the billiard and the billiard of the graph. Chromodynamics is considered natural numbers. The derivation of Diophantine equations of selection natural numbers primes or compound.

Keywords - dynamical discrete time system, billiard graph, a phase space of billiard trajectories, Diophantine equations, natural selection, method of Feynman.