

« Многомерное метро» и символные матрицы.

Г.Г.Рябов, В.А.Серов.

Абстракт. Рассматриваются комплексы k -мерных граней (k -граней) n -куба, представленные в виде символных матриц над конечным алфавитом $A = \{\emptyset, 0, 1, 2\}$. Изучается классификация кратчайших k -мерных путей (k -путей) в n -кубе на базе введенного числового инварианта для символных матриц. Предложен алгоритм «решета» при генерации представителей всех классов k -путей в n -кубе (для небольших значений n, k).

Ключевые слова: *k-границы n-куба, конечный алфавит, биективное отображение, кубанты, метрика Хаусдорфа-Хэмминга, символные матрицы, k-пути и их классификация.*

Введение. Тенденция все большего усложнения структур, используемых в современных информационных технологиях, делает актуальными решения задач отображения таких структур на более «регулярные», хотя и возможно более структурно избыточные. Под термином «регулярные» здесь подразумеваются структуры с большим числом симметрий, и как правило поэтому удобно алгебраически представимые для исследования, вычисления и использования их топологических и комбинаторных свойств. Классическим примером такой регулярной, универсальной структуры является n -куб. [] Целью данной статьи является дать представление о математическом инструментарии, связывающим методы *теории представлений, алгебраической топологии и перечислительной комбинаторики*. Такой инструментарий рассчитан на исследования комплексов k -мерных граней (k -граней) в n -кубе, биективно представленных в виде символных матриц над конечным алфавитом.

Определенный крен в изложении сделан, преследуя две цели:

1. Попытаться кратко дать логически последовательное для читателя представление развития описываемого инструментария.

2. Попытаться дать наглядное (насколько это возможно) сопоставление конкретных символных представлений и многомерных примеров с комплексами из k -граней в их графической интерпретации на плоской проекции одномерного остова (вершины и ребра) аффинного образа n -куба. В начале изложения остановимся на пояснении некоторых особенностей используемой графической интерпретации n -куба и его граней. Так на рис.1а) изображено графическое представление 3-куба в стиле диаграмм Хассе []. Будет применяться графический подход, изображающий плоскую проекцию вершин и ребер (одномерный остов) n -куба, построение которой опирается на заданный репер, как это показано на рис.1б) для 9-куба. Такая графика будет использована только для демонстрации самых общих идей топологического характера рассматриваемых структур, а все числовые характеристики (степени вершин в комплексах граней, метрика между гранями и т.д.) рассчитываются *алгебраически* на основе биективного представления.

В статье выбрана несколько необычная форма изложения в рамках рассмотрения задачи, которая имеет естественные ассоциации с реальными задачами решения транспортного коллапса в мегаполисах настоящего и будущего. Условно назовем такую задачу «проектирование многомерного метро». С целью еще большего ассоциирования с окружающей геометрией реального метро будут рассмотрены примеры для еще более узкой постановки «трехмерное метро в 9-кубе».

Неформальная постановка задачи. Линии метро в n -кубе рассматриваются как сеть тоннелей, составленных из k -граней, которые примыкают друг к другу своими

k-1-гранями. Станции заданы как набор вершин n-куба (в основном внимание будет уделено случаю пары антиподальных вершин, т.е. вершин v_1 и v_2 , с максимальным хэмминговым расстоянием $\rho_H(v_1, v_2) = n$). Ограничения могут служить грани, запретные для прохождения тоннелей, а также метрические ограничения на взаимное расположение тоннелей разных линий. Общая идея грубо изображена на рис. для соединения антиподальных вершин $\langle 00\dots 0 \rangle$ и $\langle 11\dots 1 \rangle$.

Из этих неформальных рассуждений уже следует перечень основных требований к математическому инструментарию:

1. Индивидуальное представление каждой k-грани n-куба.
2. Методы числовой оценки взаимного расположения граней всех размерностей (в т.ч. метрические соотношения).
3. Индивидуальное представление любого комплекса граней в n-кубе.
4. Методы числовой оценки взаимного расположения комплексов в n-кубе.
5. Методы исследования комбинаторного наполнения путем классификации комплексов на базе числовых инвариантов.

Сразу же укажем пути реализации этих требований.

1. Каждая k-грань будет биективно (взаимно однозначно) представлена n-разрядным (символьным) словом (кубантом) над троичным алфавитом $A = \{0; 1; 2\}$.
2. Над троичными словами вместе с расширением алфавита до $A = \{\emptyset; 0; 1; 2\}$ вводятся поразрядные операции, с помощью которых вычисляются пересечения граней, выпуклая оболочка граней и величина минимального пути (по ребрам) между гранями. На базе этого вводится метрика Хаусдорфа-Хэмминга на всех гранях n-куба, которая является естественным расширением метрики Хэмминга для вершин.
3. Каждый комплекс граней в n-кубе представлен символьной матрицей, строками которой являются кубанты. На базе такого матричного представления (с введением дополнительных условий)

дается определение кратчайшего k-мерного пути (k-пути) в n-кубе.

4. Методы оценки взаимного расположения комплексов опираются на методы п.2

5. Вводится числовой инвариант для символьных матриц, представляющих k-путь. Он позволяет классифицировать все матрицы в соответствии с разбиениями числа символов в матрице при определенных ограничениях на такие разбиения.

В целом содержание представленной статьи следует в русле фундаментальных работ Рота, Стенли, Манина, Эндрюса. []

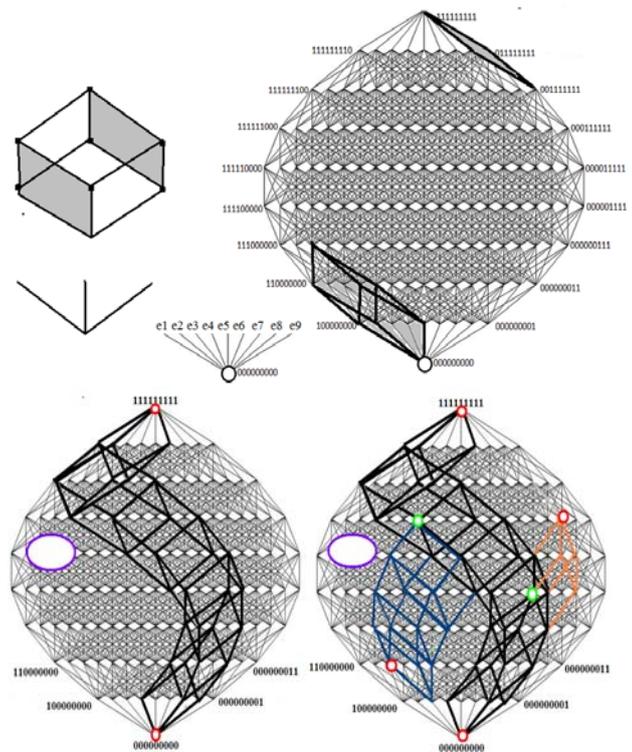


Рис.1 а). представление репера. в). Плоская проекция одномерного остова 9-куба, используемая в статье.

В основе дальнейшего изложения лежит биекция для k-граней n-куба, предложенная в []

Пусть $V = \{0; e_1, \dots, e_n\}$ -репер в \mathbf{R}^n ; $A = \{0, 1, 2\}$ -алфавит и $A_n^* = \{ \langle d_1, \dots, d_n \rangle \}; d_i \in A$ - множество всех n-разрядных слов (кубантов) над этим

алфавитом. Слово этого множества обозначается как $D = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$.

Каждая k -грань n -куба (fnk) представляется как декартово произведение Π единичных отрезков $I(e_i)$ для базисных векторов $e_i \in V_1 \subset V$ и трансляции (T) вдоль остальных базисных векторов так, что $e_j \in V_2 \subset V$ при $V_2 = V \setminus V_1$.

На основании этого можно записать наше представление как:

$f_{nk}(V_1, V_2) = \Pi(e_i) + T(e_j) \leftrightarrow \langle d_1, \dots, d_n \rangle$, где $d_i = 2$ для $e_i \in V_1$ и $d_j \in \{0, 1\}$ для $e_j \in V_2$; (1) $d_j = 1$ при наличии трансляции вдоль e_j и $d_j = 0$ при ее отсутствии.

Другими словами можно рассматривать такую запись как в специальной позиционной (поразрядной) системе для отображения *двух действий* - *декартового произведения* и *трансляции*. Символ в i -ом разряде кубанта показывает как используется единичный отрезок $I(e_i)$, коллинеарный e_i . А именно «2»-участие $I(e_i)$ в декартовом произведении, «1»-участие в параллельном переносе (трансляции) вдоль e_i , «0»-отсутствие трансляции вдоль e_i . Так кубант $D = \langle 020201201 \rangle$ соответствует трехмерной грани с декартовым произведением $\Pi(I(e_2), I(e_4), I(e_7))$ и трансляцией вдоль e_6, e_9 . При таком представлении традиционная двоичная кодировка вершин n -куба сохраняется.

Примеры графической интерпретации можно видеть на рис.1

Дополнив символом \emptyset принятый алфавит A ($A' = \{\emptyset, 0, 1, 2\}$), вводятся поразрядные операции на кубантах. Список основных операций (поразрядных) и правила их выполнения приведены ниже.

1. $\#(a)D$ - число символов «a» в кубанте D ;
2. $-D$ - кубант грани, антиподальной к исходной (замена в кубанте всех «0» на «1» и всех «1» на «0»)
3. $D_1 + D_2$ - сложение (объединение) кубантов (таблица 1); результат-кубант грани- выпуклой оболочки исходных.

4. $D_1 \times D_2$ -

умножение (пересечение) кубантов (таблица 2); результат- кубант общей грани для исходных.

	+	\emptyset	0	1	2
\emptyset		\emptyset	0	1	2
0		0	0	2	2
1		1	2	1	2
2		2	2	2	2

Таб.1

	x	\emptyset	0	1	2
\emptyset		\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset
0		\emptyset	0	\emptyset	0
1		\emptyset	\emptyset	1	1
2		\emptyset	0	1	2

Таб.2

Легко видеть, что длина минимального пути по ребрам между гранями с кубантами D_1 и D_2 равна $L_{\min}(D_1, D_2) = \#(\emptyset)(D_1 \times D_2)$;

Графическая интерпретация операций показана на рис.1.

В [] на базе (1) и учитывая выпуклость любых k -граней была введена метрика Хаусдорфа на гранях n -куба, которая является обобщением метрики Хэмминга; предложен алгоритм ее вычисления с помощью кубантов. Для этого вводится специальная бинарная операция $\mu(D_1/D_2)$.

5. $\mu(D_1/D_2)$. Замена символов «2» на «0» в тех разрядах d_{1i} кубанта D_1 , для которых $d_{2i} = 1$, и «2» на «1», для которых $d_{2i} = 0$. Результат- кубант D_3 со свойствами $D_3 \in D_1$ и $\#(\emptyset)(D_3 \times D_2) = \max(L_{\min}(D_3, D_2))$. Отсюда:

$$\rho_{HH}(D_1, D_2) = \max \{ \#(\emptyset)(\mu(D_1/D_2) \times D_2); \#(\emptyset)(\mu(D_2/D_1) \times D_1) \}$$

Таким образом все 3^n граней n -куба образуют конечное метрическое пространство с метрикой Хаусдорфа-Хэмминга. В частности для кубантов D_4 и D_5 (рис.3) $\rho_{HH}(D_4, D_5) = 6$;

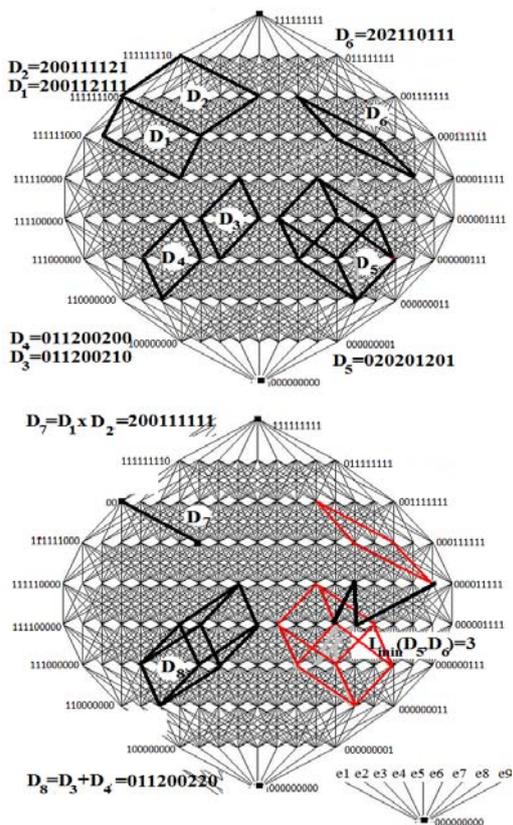


Рис2 Кубанты, операции над ними и НН-метрика в проекции 9-куба.

Исследование свойств некоторого множества граней n -куба естественно рассматривать в форме биективного представления этих граней в виде кубантов. Пусть число граней (кубантов) в таком множестве равно s . Тогда, считая каждый кубант одной из строк в матрице из s строк, можно говорить о биективном представлении комплекса граней в виде троичной символьной $p \times s$ матрицы. (Вопрос о порядке следования строк пока оставим в стороне). Возвращаясь к задаче прокладки тоннелей «трехмерного метро в 9-кубе» между станциями $v_1=00...0$ и $v_2=11...1$, легко представить примеры соответствующих символьных 9×7 матриц, как это показано на рис.4. Отметим основные свойства таких матриц:

1. $\langle 00...0 \rangle \in D_1; \langle 11...1 \rangle \in D_7$; (как станции назначения)
2. Размерности всех граней в тоннеле равны 3, т.е. $\#(2)D_i=3; i=1-7$;

3. Для соседних граней условие стыковки $\#(2)(D_i \times D_{i+1})=2$; (размерность гиперграней)

4. Требование кратчайшего тоннеля (по числу входящих в него граней) приводит к свойству, что столбцы матрицы $D_j^* (j=1-9)$ имеют вид только 4-х типов 1). из всех «2»; 2). из «2» и следующих за ними только «1»; 3) из «0» и следующих за ними только «2»; 4). из «0» и следующих за ними «2» и «1» (согласно 2).

Отсюда можно дать биективное определение кратчайшего k -мерного пути (k -пути)

в n -кубе между вершинами $\langle 00...0 \rangle$ и $\langle 11...1 \rangle$.

Определение. Кратчайший k -путь в n -кубе между $\langle 00...0 \rangle$ и $\langle 11...1 \rangle$, который можно представить (с учетом возможных перестановок строк) в виде троичной $p \times (n-k+1)$ матрицы, удовлетворяющей свойствам 1-4.

Отметим, что для произвольных антиподальных вершин в n -кубе в матрице (для пары $(\langle 00...0 \rangle; \langle 11...1 \rangle)$) в столбцах достаточно провести операцию \neg , как это показано на рис.

$$T_s(9,3) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} T_{sc}(9,3) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & & & & & & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & & & & & \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & & & & \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & & & \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & & \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. $\langle 00...0 \rangle \in D_1; \langle 11...1 \rangle \in D_7$;
2. $\#(2)D_i=k; (3) i=1:(n-k+1); (1-7)$;
3. $\#(2)(D_i \times D_{i+1})=k-1$;
4. $D_i^* \in \{(2), (2)(1), (0)(2)(1), (0)(2)\}$;

Для антиподальных вершин (011010011) и (100101100) соответствующие столбцы $T(9,3)$ инвертируются так, что

$$T_s(9,3) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow T'(9,3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Рис3. Символьные матрицы и комплексы

Если рассмотреть проекции k -путей для матриц T и T' , то можно отметить их существенное структурное различие. (рис.4) Чтобы обобщить такое различие, поставим для каждой матрицы в соответствие строку из n чисел $\{\#(2)D_1^*, \#(2)D_2^*, \dots, \#(2)D_n^*\}$ (число символов «2» по столбцам). Затем введя упорядочение этих чисел по убыванию, представим их как разбиение числа всех «2» матрицы (их число равно $k(n-k+1)$) на n частей, при условии, что старшая часть не превышает $n-k+1$. Следуя принятым в [] обозначениям, можно записать: $\lambda(T(n,k)) = \lambda(k(n-k+1); n; n-k+1)$. При любой перестановке столбцов это разбиение не меняется. Любая перестановка столбцов эквивалентна действию симметрической группы S_n на множестве индексов базисных векторов, что является автоморфизмом для n -куба. Таким образом разбиение можно рассматривать как числовой инвариант, позволяющий классифицировать k -пути в n -кубе.

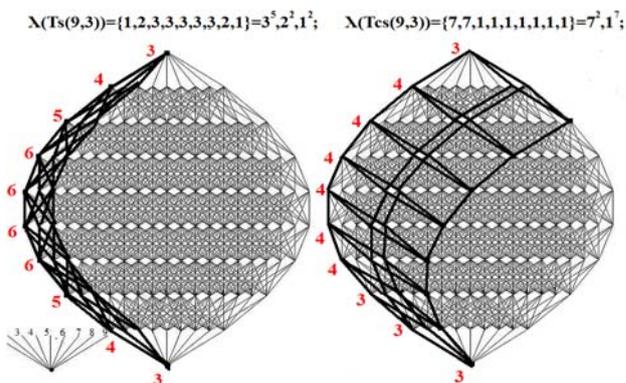


Рис.4. Графическое отображение проекций k -путей

и разбиения для их символьных матриц.

Однако не любое разбиение числа символов «2» матрицы представляет кратчайший k -путь, а только вместе с выполнением всех четырех свойств (). Таким образом величина $\lambda(k(n-k+1); n; n-k+1)$ даже при выполнении свойств 1-3 из () может служить лишь верхней оценкой числа классов эквивалентности k -путей в n -кубе, что и было показано в [].

Ниже будет предложен алгоритм типа «решета» в терминологии Г.Эндрюса [] получения всех классов эквивалентности $K(n,k)$ (точнее представителей всех классов) для относительно небольших значений n, k . Однако вначале рассмотрим вопрос приведения $T()$ к k -диагональному виду.

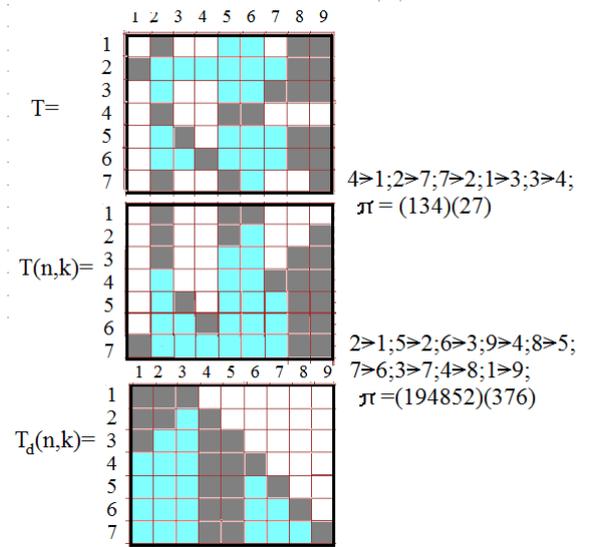
Выше в основном рассматривались матрицы $T()$, обладающие следующим свойством. Все символы «2» в них располагались на местах (i,j) , для которых $j-i \leq k-1$, грубо говоря под диагональной полосой и на самой полосе шириной в k символов. Будем условно называть такие матрицы k -диагонального вида.

Пусть дана произвольная матрица $T()$, обладающая свойствами 1-4. Тогда перестановкой столбцов она может быть преобразована в матрицу $T_d()$ k -диагонального вида с сохранением инварианта $\lambda(T())$. Доказательство этого утверждения - конструктивное. Предлагается алгоритм построения перестановки столбцов, приводящий к результату.

Пусть первая строка матрицы содержит k символов «2» на местах $d_{1,x_1}, d_{1,x_2}, \dots, d_{1,x_k}$, которым соответствуют столбцы матрицы с номерами $x_1 > x_2 > \dots > x_k$. Рассмотрим перестановку этих столбцов на места $1, 2, \dots, k$ (точнее установку на первые k -мест в результирующей матрице k -диагонального вида $T_d^*(n,k)$). Затем среди оставшихся столбцов отыскиваем столбец, в котором «2» находится на уровне 2-ой строки. Такой столбец всегда найдется и он

единственный, вследствие выполнения условия $\#(2)D_2=k$. Присоединяем этот столбец в качестве $k+1$ -го к результирующей матрице. Затем среди оставшихся столбцов находим столбец, в котором «2» на уровне 3-ей строки и т.д. Процесс заканчивается, когда присоединяется последний столбец на место n -го столбца с «2» в правом нижнем углу результирующей матрицы. Если сопроводить последовательное присоединение столбцов парой чисел их номеров в исходной и результирующей матрице, то легко из этого получить цикловую форму подстановки, переводящей $\pi T(n,k) \rightarrow T_d^*(n,k)$; $\pi \in S_n$; Это показано на примере одной из матриц $T(9,3)$ на рис.

Справедливо и более общее утверждение. Пусть предъявлена произвольная троичная матрица $T(\)$ для установления ее принадлежности к множеству $T(n,k)$. Тогда общий алгоритм формирования $T_d(n,k)$ начинается с упорядочения строк матрицы. При упорядочении строк процедура начинается с поиска граней с а.п.вершинами и затем присоединения к ним строк с учетом свойства $\#(2)(D_j \times D_{j+1})=k-1$; Процесс заканчивается, когда все строки заняли «свои» места или останавливается, когда не находится следующая строка с приведенным выше свойством. В этом случае предъявленная $T(n,k) \notin T(n,k)$ В случае успешного упорядочения строк осуществляется переход к описанному выше алгоритму перестановки столбцов и в случае его естественного окончания дает положительный ответ и выдает необходимые перестановки строк и столбцов, а в случае отсутствия на очередном шаге подходящего столбца (или наличия более одного столбца) свидетельствует о нарушении свойства $\#(2)D_i=k$ и поэтому $T(\) \notin T(n,k)$.



Алгоритм генерации представителей всех классов основан на следующем рассмотрении. Обозначим через $T(n,k)$ множество всех k -диагональных матриц, для которых выполнены свойства 1-4. Пусть имеется некоторая символьная матрица $T_d(n,k) \in T(n,k)$. Удалим в ней n -ый (правый крайний) столбец и $n-k+1$ -ую (последнюю) строку, обозначим полученную матрицу как $T_d^{-1}(n,k)$. Для этой матрицы автоматически выполняются свойства 1-4 и следовательно она принадлежит множеству матриц $T(n-1,k)$, т.е. $T_d^{-1}(n,k) \in T(n-1,k)$. С ней поступаем аналогично так, что $T_d^{-2}(n,k) \in T(n-2,k)$ и т.д. вплоть до $T_d^{-s}(n,k) \in T(n-s,k)$, когда $n-s=k$. В этом случае множество $T(k,k)$ состоит из единственной матрицы с одной строкой из символов «2», т.е. кратчайший k -путь в k -кубе между любыми а.п.вершинами есть сам k -куб. Теперь с этого момента рассмотрим этот процесс в обратном порядке, т.е. будем добавлять к матрице последний столбец и последнюю строку с единственным символом «2» в правом нижнем углу (как необходимое условие принадлежности конструируемых матриц к виду k -диагональных). Чтобы корректно дополнить эту матрицу до $T_d(\)$ необходимо выполнить условие $\#(2)(D_j \times D_{j+1})=k-1$ и вставить один символ «1» на оставшееся место в

последней (в нашем случае 2-ой строке). Число таких вариантов равно k . Они образуют все множество $T()$.

С каждой матрицей из $T()$ будем поступать аналогично, дополнительно сохраняя в столбцах те же места для вставленных на предыдущих шагах символов «1» (соблюдение 4-го свойства для матриц $T()$). Процесс останавливаем при достижении заданного n . Практически строится дерево полного перебора с числом вершин $k \uparrow n-k$ на шаге n . Каждой вершине соответствует единственная матрица $T()$ с разбиением $\lambda(T())$. Сравнивая разбиения матриц и отбрасывая матрицы с разбиениями, которые повторяются, мы практически реализуем метод решета. Начальные шаги предложенного метода и некоторые матрицы для $T(9,3)$ показаны на рис. .

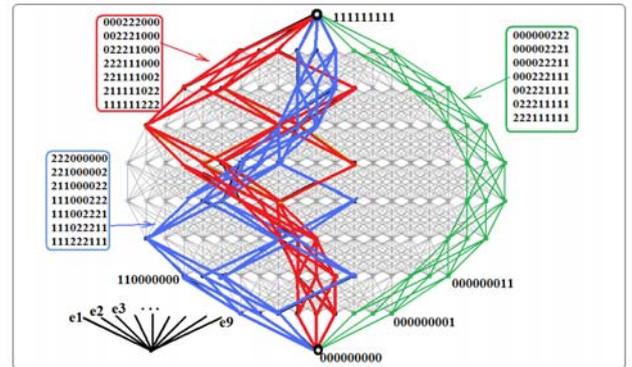
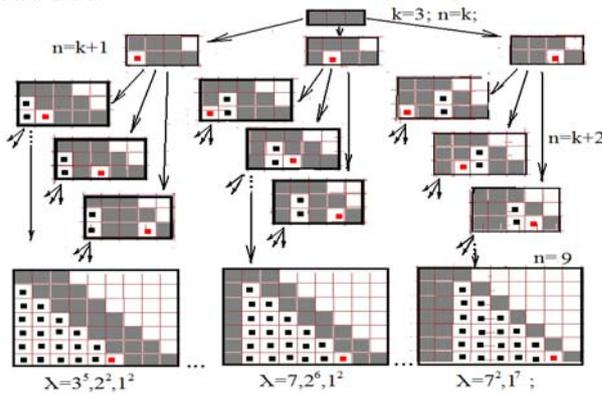


Рис 6.



С помощью предложенного метода рассчитаны все матрицы-представители классов для $n=9$ и $k=3$. Их разбиения приведены в таблице 3.

Каждому классу (разбиению) соответствует своя структура («форма») k -пути. Топологические характеристики таких форм могут быть вычислены на основании самих символьных матриц.

Возвращаясь к прокладке трехмерного метро в 9-кубе, приведем в заключение три символьные матрицы одного класса с разбиением $\lambda=(3^5, 2^2, 1^2)$, которые соответствуют трем непересекающимся (кроме конечных станций $\langle 00\dots 0 \rangle$ и $\langle 11\dots 1 \rangle$) линиям. (рис.6)